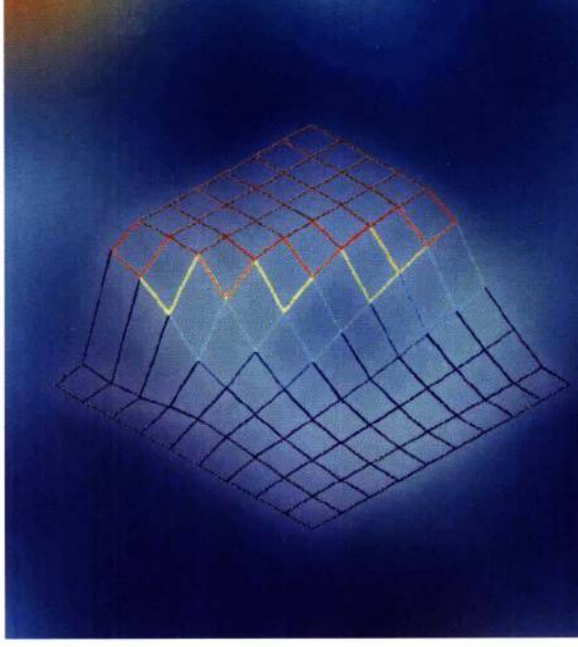


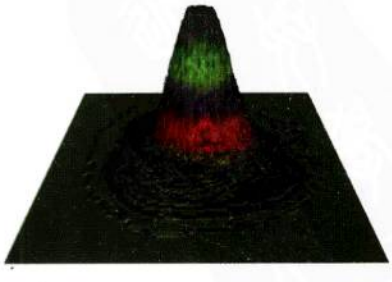
计算超声学

—— 声场分析及应用

丁 辉/著

Computational Ultrasonics

——Analysis and Application of Ultrasonic Field



科学出版社
www.sciencep.com

(TH-0425.0101)

计算超声学
——声场分析及应用



Computational Ultrasonics
——Analysis and Application of Ultrasonic Field

科学出版社
联系电话：010-64017506
E-mail:gcjs@mail.sciencep.com

ISBN 978-7-03-027937-8

销售分类建议：无损检测；材料工程

定 价：66.00 元

计算超声学
——声场分析及应用

Computational Ultrasonics
——Analysis and Application of Ultrasonic Field

丁 辉 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书主要研究声场问题数学上的处理，重点介绍了探头发射声场的建模与应用、声波在各向异性介质中的传播、缺陷与声波的相互作用及散射回波的计算与应用等计算超声学基础，同时介绍了表面波和相控阵、导波、TOFD、检测可靠性评价等新技术中的超声计算与应用。本书内容上侧重声场的分析与应用，方法上着重使用近似且简单的方法，列举了一些无损检测中经常遇到的实际问题的解决实例。本书附录还提供了8个涉及主要声场计算方法和应用的计算程序，方便大家掌握和使用。

本书可供无损检测及相关专业研究生、科研人员在学习和研究时使用，也可作为从事无损检测的技术人员的培训或辅助教材。

图书在版编目(CIP)数据

计算超声学：声场分析及应用＝Computational Ultrasonics：Analysis and Application of Ultrasonic Field/丁辉著．—北京：科学出版社，2010.6

ISBN 978-7-03-027937-8

Ⅰ.①计… Ⅱ.①丁… Ⅲ.①超声检测 Ⅳ.①TB553

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第110651号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年6月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2010年6月第一次印刷 印张：18 3/4

印数：1—3 000 字数：370 000

定价：66.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

——波行天下　必寻其踪

我自1978年步入材料与检测专业至今已三十余年。春华秋实，学生已独挑大梁，多有建树。通过年复一年的教学科研积累，感觉对一些专业领域知识已吃透并能熟练掌握和应用，但也有一些一直缠绕心头的疑惑和困扰，最突出的一例就是作为常规无损检测之首的超声检测声场及缺陷回波信号的判定。目前，即便是最专业的检验人员也是凭经验在做评定，面对复杂的检测系统，往往无能为力。与检测界的同行们交流时，大家也都认识到超声检测技术发展的关键是解决超声波在工件中的"踪迹"问题，"寻踪"已成为超声检测理论和应用研究的一个共性问题。

2003年，在和中国广东核电集团束国刚先生探讨核电站关键部件超声检测时，我们共同认识到，要提高超声检测的可靠性，必须把握声场在工件中的传播及声场与缺陷相互作用的规律，建立超声声场及回波信号与工件结构、材质、缺陷类型、位置、尺寸、取向的定量关系。其后，双方抱着"波行天下，必寻其踪"的信心和决心，共同开展计算超声学的研究，开始了艰难的"寻踪"旅程。现在回头看，不仅达成了预期的目标，成果也应用到核电等其他领域。本书的内容主要来源于以上的工作。

一门技术成熟或上升到科学的最基本、最显著的标志是其进入了误差很小的定量化阶段。计算超声学的形成和应用，极大丰富了超声波检测技术的理论与应用基础，将其提升为一门有坚实的科学理论支撑的实用技术，成为独立于声学、材料学、计算机科学之外的一个新的科学分支。

计算超声学主要研究声场问题数学上的处理，基于定量化和数字化的超声声场计算与分析模拟是其核心内容，实用化的超声声场计算软件开发是工作重点。计算超声学的生命力在于众多的无损检测工作者能够掌握与应用，成为解决众多工程实际问题的重要手段，而不是让他们望而生畏的象牙塔，只被少数理论研究者读懂和使用。故本书的编写力求在开展计算超声学理论基础研究的同时，侧重声场的分析与应用，着重介绍近似且简单的方法，同时列举了一些无损检测中经常遇到的实际问题的解决实例。本书附录还提供了8个涉及主要声场计算方法和应用的计算程序，方便大家掌握和使用。

本书共分13章，第1章为绪论。第2～4章是计算超声学的基础，第2章介绍了探头发射声场的建模与应用；第3章介绍了声波在各向异性介质中的传播；第4

章介绍了缺陷与声波的相互作用，重点是缺陷散射回波的计算与应用。第 5～8 章分别介绍了计算超声学在表面波和相控阵、导波、TOFD 等新技术中的建模与应用。第 9、10 章介绍了生物组织的超声传播特性与建模及超声成像算法，生物组织的很多特性都与工业超声检测中的检测对象相似，超声成像也比工业检测应用广泛，因此，希望将医学超声建模和成像的研究成果引入到工业超声检测中。第 11 章介绍了国外计算超声学的发展及计算超声软件的应用。第 12 章介绍了计算超声学与虚拟现实技术的结合——超声虚拟检测平台的开发。第 13 章重点介绍了将可靠性引入无损检测领域，利用超声计算进行可靠性评价的方法与应用。

本书的编写，特别要感谢张俊博士和张益成博士，他们几年来在计算超声领域的艰苦探索构成了本书的主要内容，书中每一个公式和编程都凝聚了他们的智慧与汗水，每一个计算和图表也出自他们之手。同时要感谢武汉大学（原武汉水利电力大学）无损检测学科的开拓者们和正在从事无损检测工作的各届校友们，他们支撑了中国无损检测事业的一大片天空，也是我工作的坚强后盾。还要感谢中国广东核电集团检测公司的李明先生，他为计算超声学的应用给予了大量的支持和帮助。

作　者

2010 年 4 月于武昌珞珈山

目　录

前言
第 1 章　绪论 …… 1
1.1　背景 …… 1
1.2　方法 …… 2
1.2.1　解析法 …… 2
1.2.2　数值法 …… 4
1.2.3　半解析法 …… 6
1.3　发展前景 …… 7
第 2 章　探头的发射声场 …… 10
2.1　声场基本方程 …… 10
2.1.1　固体介质的波动方程 …… 10
2.1.2　流体介质的波动方程 …… 11
2.1.3　声束在界面处的透射和反射 …… 11
2.2　角谱法 …… 13
2.2.1　角谱法计算液体中的声场 …… 14
2.2.2　角谱法计算液固界面透射声场 …… 15
2.2.3　应用实例 …… 16
2.3　瑞利积分法 …… 18
2.3.1　瑞利积分一般公式 …… 19
2.3.2　Pencil 法 …… 20
2.3.3　瑞利积分法计算界面透射声场 …… 22
2.3.4　应用实例 …… 22
2.4　多元高斯叠加法 …… 23
2.4.1　近轴方程 …… 24
2.4.2　单高斯声束的传播 …… 24
2.4.3　多元高斯声束叠加计算探头发射声场 …… 27
2.4.4　应用实例 …… 29
2.5　离散点源法 …… 30
2.5.1　DPSM 的基本理论 …… 30
2.5.2　应用实例 …… 32

2.6 弹性动力学有限积分法 …… 33
2.6.1 EFIT 一般公式 …… 33
2.6.2 非均质介质的网格离散 …… 34
2.6.3 应用实例 …… 36
2.7 有限差分法 …… 38
2.7.1 差分格式 …… 38
2.7.2 固体声场方程的差分展开 …… 38
2.7.3 应用实例 …… 40
2.8 有限元法 …… 41
2.8.1 有限元方程与求解 …… 41
2.8.2 应用实例 …… 43
第 3 章 各向异性介质中超声波的传播 …… 46
3.1 各向异性介质 …… 46
3.2 多元高斯声束叠加法 …… 50
3.2.1 均质各向异性介质 …… 50
3.2.2 多层各向异性介质 …… 54
3.3 瑞利积分法 …… 56
3.4 射线追踪法 …… 57
3.4.1 步进追踪 …… 57
3.4.2 计算实例 …… 59
3.5 有限差分法 …… 61
第 4 章 缺陷与结构散射声场 …… 64
4.1 规则体的散射 …… 64
4.1.1 空心圆柱散射 …… 64
4.1.2 球形体散射 …… 65
4.1.3 平面边缘衍射 …… 68
4.2 基于近似理论的散射模型 …… 70
4.2.1 基尔霍夫近似 …… 70
4.2.2 波恩近似 …… 73
4.3 散射问题的数值解 …… 79
4.3.1 有限差分法 …… 79
4.3.2 有限元法 …… 82
4.3.3 边界元法 …… 85
4.3.4 弹性有限积分法 …… 88

第 5 章　超声表面波检测 …… 93
5.1　表面波的振动与激发 …… 93
5.1.1　表面波的振动方程 …… 93
5.1.2　表面波的激发源 …… 95
5.2　半解析法 …… 96
5.3　表面波的数值解 …… 98
5.3.1　有限差分法 …… 98
5.3.2　有限元法 …… 100
第 6 章　超声导波 …… 102
6.1　频散方程 …… 102
6.1.1　板导波 …… 102
6.1.2　管导波 …… 105
6.1.3　各向异性介质中的导波 …… 107
6.2　模态分解法 …… 109
6.3　有限元法 …… 115
6.3.1　板导波 …… 115
6.3.2　管导波 …… 119
6.3.3　复杂结构导波 …… 123
6.4　边界元法 …… 125
6.4.1　边界元法和简正模态展开法混合模型 …… 125
6.4.2　应用实例 …… 129
6.5　半解析有限元法 …… 132
6.5.1　SAFE 理论 …… 132
6.5.2　应用实例 …… 136
6.5.3　基于 SAFE 和互易原则的导波回波计算 …… 138
第 7 章　超声衍射时差检测 …… 142
7.1　TOFD 检测原理 …… 142
7.2　GTD 理论 …… 143
7.2.1　衍射法则 …… 143
7.2.2　边缘衍射系数 …… 144
7.3　声线法 …… 147
7.4　半解析法 …… 152
7.4.1　背散射的简化 …… 152
7.4.2　衍射模型瞬态公式 …… 153
7.4.3　衍射与接收过程 …… 155
7.5　有限元法 …… 158

第 8 章　超声相控阵 …… 162
8.1　超声相控延迟法则 …… 162
8.2　半解析法 …… 164
8.2.1　瑞利积分法 …… 164
8.2.2　高斯法 …… 165
8.3　数值法 …… 170
第 9 章　生物组织中的超声传播 …… 172
9.1　生物组织声学特性 …… 172
9.2　生物组织解析法分析 …… 174
9.2.1　非均匀连续模型 …… 174
9.2.2　分离散射子模型 …… 177
9.2.3　分层介质模型 …… 179
9.3　骨骼的数值分析 …… 180
9.4　多普勒法 …… 182
第 10 章　超声成像算法 …… 186
10.1　弹性成像算法 …… 186
10.2　傅里叶成像算法 …… 191
10.3　合成孔径算法 …… 195
10.4　三维成像算法 …… 198
第 11 章　计算超声软件及应用 …… 204
11.1　CIVA …… 204
11.1.1　软件介绍 …… 204
11.1.2　应用情况 …… 206
11.2　Imagine3D …… 210
11.2.1　软件介绍 …… 210
11.2.2　应用情况 …… 211
11.3　simSUNDT …… 212
11.3.1　软件介绍 …… 212
11.3.2　应用情况 …… 215
11.4　Vitual NDE …… 216
11.4.1　软件介绍 …… 216
11.4.2　应用情况 …… 217
11.5　超声仿真的其他软件 …… 218
11.5.1　UTSIM …… 218
11.5.2　Wave3000 Pro …… 219

第 12 章　基于实时计算的超声检测虚拟现实系统 …… 222
12.1　系统的框架与结构 …… 222
12.2　虚拟现实场景模块 …… 223
12.2.1　虚拟场景构建 …… 223
12.2.2　虚拟超声仪构建 …… 227
12.3　实时计算模块 …… 228
12.3.1　探头发射声场计算 …… 228
12.3.2　声场与缺陷相互作用 …… 229
12.3.3　回波声场计算 …… 231
12.4　系统的应用 …… 231
12.4.1　系统培训功能 …… 231
12.4.2　回波分析 …… 232
12.4.3　检测工艺验证 …… 234
第 13 章　无损检测可靠性分析 …… 237
13.1　可靠性概率统计模型 …… 237
13.1.1　hit/miss 型数据模型 …… 237
13.1.2　信号响应型数据模型 …… 238
13.1.3　95%置信下限 …… 240
13.2　可靠性模型的参数估计 …… 241
13.2.1　hit/miss 型数据模型的参数估计 …… 241
13.2.2　信号响应型数据模型的参数估计 …… 243
13.3　基于可靠性分析的检测工艺评定与优化 …… 246
13.3.1　基于数值模拟的现场工艺可靠性评定 …… 246
13.3.2　基于综合参数分析的 TOFD 检测工艺优化 …… 249
13.3.3　人员可靠性分析 …… 252
13.4　风险指引型在役检查 …… 255
13.4.1　计算公式 …… 255
13.4.2　数值算例 …… 257
附录 1　瑞利积分计算声场 …… 261
附录 2　高斯法计算声场 …… 264
附录 3　基尔霍夫系数 …… 270
附录 4　波恩系数 …… 273
附录 5　GTD 衍射系数 …… 277
附录 6　相控阵 …… 278
附录 7　信号响应模型计算程序 …… 282
附录 8　log-odds 模型计算程序 …… 287

第1章 绪 论

1.1 背 景

设计、材料、加工和检测构成了现代制造业的四大支柱，而可靠的无损检测技术为产品质量的提升及生产过程安全提供了有力保障，所以说一个国家的无损检测水平反映了该国的工业技术水平，现代工业是建立在无损检测基础上的。无损检测技术能为企业带来显著的经济效益，统计资料显示，经过无损检测后，普通机械产品有5%～10%的产品增值，电力、化工、国防、宇航和核能产品有12%～18%的产品增值，如德国奔驰汽车几千个零件经过无损检测后，整车运行公里数提高了一倍；日本汽车在30%零件采用无损检测后，质量迅速赶上美国。

伴随着改革开放30年我国经济的快速崛起，我国拥有了世界上最大的无损检测队伍和市场，目前，我国有2000多家无损检测机构，近17万无损检测人员，大专院校每年培养近千名无损检测专业的大专生、本科生和研究生；年无损检测仪器销售额超10亿元，年无损检测服务产值超250亿元。中国的现代化建设对先进的无损检测仪器、技术和服务有巨大的需求。我国的无损检测工作者肩负着重要的历史使命，无损检测事业也面临着前所未有的发展机遇。

超声检测是国内外应用最广泛、使用频率最高且发展较快的一种无损检测技术，与其他无损检测技术相比，它具有检测对象范围广，检测深度大，对裂纹类缺陷敏感、灵敏度高，成本低，使用方便，速度快，对人体无害以及便于现场使用等特点。目前，国外每年发表的约3000篇涉及无损检测的文献资料中，约有45%是有关超声无损检测的。

传统的超声波检测是以实践和经验为基础的一门技术，主要依靠检测人员根据回波信号凭经验进行缺陷评定。当被检工件的材质和结构复杂时，如压力容器的不规则表面、核电站的非均质各向异性奥氏体焊缝、飞机翼板的多层复合材料等，即使有经验的检测人员也会遇到缺陷识别和定量困难。

近年来，相控阵、导波、TOFD等新技术的应用大大丰富了超声检测理论与应用领域，提高了检测效率。但面对复杂的检测系统，建立超声声场及回波信号与工件结构、材质、缺陷类型、位置、尺寸和取向的定量关系，对提高超声检测的定位、定性和定量的可靠性更显重要，可指导检测工艺的设计和辅助分析检测数据。

一门技术成熟或上升为科学，最基本、最显著的标志是其进入了误差很小的定

量化阶段。超声检测的发展方向必然是以定量化和提高检测可靠性为目标，从超声传播理论入手，研究声场在介质中的传播及声场与缺陷相互作用的规律，建立超声检测系统模型，探索准确的缺陷识别与定位定量方法。只有建立超声检测参数与声场及回波信号之间的定量关系，完善超声检测理论，才能将超声波检测技术提升为一门有坚实的、多学科理论支撑的实用技术，成为独立于声学、材料学、计算机科学的一个新的科学分支。所以基于超声传播理论的超声检测声场计算与分析同时具有理论和工程应用意义。

计算超声学，作为无损检测领域中的新兴学科，正在逐步建立。基于定量化和数字化的超声声场计算与分析模拟是其核心内容，对不能给出简单解析解和实验条件有限的超声检测的模拟及各种建模方法的研究是工作重点。目前，国内外已开发出了超声模拟仿真商用软件，有望在实际检测中实现如下功能[1~3]：

(1) 帮助科研人员或者无损检测人员分析实验数据，提高缺陷的辨识、定位和定量分析。

(2) 能力验证，通过模拟计算确定某一检测方法的能力，及其在工程实际中的实用性和可靠性。

(3) 通过模拟仿真设计和优化检测方法，特别是对于相控阵技术，模拟方法可以确定实际中所需要的探头形状和最优延迟率，从而提高相控阵技术在实际应用中的能力。

(4) 虚拟检测，能够为工件早期设计提供帮助。

(5) 培训功能，提高技术人员的理论及实际操作水平。

1.2 方　　法

超声检测模拟的过程是利用超声检测系统的参数，如探头的类型、频率、带宽、尺寸、发射波形，工件的几何结构与材质声学特性，缺陷的类型、位置、尺寸和取向，扫查路径等，建立数学模型并进行公式化处理，然后编程计算得到探头接收到的缺陷回波的 A 扫描波形、B 扫描和 C 扫描图像及回波动态曲线等。其中数学模型的建立是关键，目前常用的建模方法有解析法、数值法和半解析法。

1.2.1 解析法

解析法是一种通过分析问题中各要素之间的关系，用最简练的语言或形式化的符号来表达它们之间的关系，得出解决问题所需的表达式，然后设计程序求解问题的方法。解析法只能处理较为简单的情况，目前，无损检测培训教材中超声检测理论基础利用解析法给出了圆盘源和矩形波源发射声场及规则反射体回波表达式，但是未考虑声场计算声束穿过多层界面时的情况，回波表达式也只限于位于探

头声压轴线上的反射体，而且所给均为声压幅值表达式，未考虑相位影响，故无法得到时域波形。运用解析法求解仅限于相当简单的工件几何形状和各向同性材质、探头激励载荷和边界条件，如果这些条件变得复杂，则分析工作将变得冗长，甚至不可能求得其解。

利用解析法求解固体中的体波、表面波和导波波动位移场的一般步骤为：首先写出波动方程，然后根据波形振动形式给出初始解的表达式，带入波动方程，最后根据满足自由边界的应力应变边界条件，得出位移场。对于常见的体波检测（横波和纵波），由于探头发射波形不是单纯的平面波或球面波，在各向异性或曲界面等情况下，即使是规则波阵面也会被扭曲，此时通常引入数学变换及理论方法来进行建模。常用体波探头发射声场及声场在介质中的传播的计算方法有角谱法（angular spectrum method）、多元高斯声束叠加法（multi-Gaussian beam method）和射线追踪法（ray tracing model）。

角谱法[4]最先应用于光学，20世纪70年代被引入声学领域，并越来越受到关注。角谱法的基本思想是将探头发射的波分解成无数个平面波，分别计算每个平面波在介质中的传播和衰减，然后基于一定的加权函数将所有平面波叠加起来模拟声场的传播。当考虑声束在界面处的透射时，只需要将每个平面波传播表达式乘以相应的平面波透射即可。角谱法实际上是惠更斯原理的空间频域表现形式，在数值计算中使用了二维傅里叶变换，因而极大地缩短了计算时间，但是所得模型需要对很多平面波进行叠加，计算量仍然较大。利用角谱法也可处理复杂情况，如各向异性介质中的声场分布、声束在曲界面处的透射及反射等，但是由于各向异性材质的复杂性，在处理过程中可能需要用到数值法。

多元高斯声束叠加模型是利用多个高斯声束叠加得到多元高斯声束，来模拟探头发射声场[5]。由于高斯分布函数的特殊性，利用高斯基函数可以很容易地推导出单个高斯声束的声场解析表达式，用于描述单个高斯声束在介质中传播、在界面处反射和折射时的振幅衰减和相位变化。在得到单个高斯声束声场后，只需要采用一组10个或15个加权系数进行叠加，即可得到相应类型探头的发射声场。多元高斯声束叠加模型可用于模拟活塞型、矩形和相控阵探头发射声场，以及声场在非均质各向异性介质和不规则界面处的传播及传播过程中的波形转换。由于能够得到声场的解析表达式，该模型的最大特点是计算速度快。高斯声束模型建立在近轴近似的理论基础上，因此在满足该条件的远场及外半近场范围内，该模型具有较高的计算精度，而在半近场以内的范围则会出现较大的误差。实际检测一般取远场作为检测区域，故可以保证该模型的实用性。但是值得注意的是，当声束在界面上传播时，由于入射角的关系，可能会导致不满足近轴近似条件，从而产生较大的计算误差[6]。

射线追踪法是一种计算声线在介质中传播路径及振幅衰减的方法，该方法给

出的结果为声线在介质中的传播状态[7]。在超声检测过程中，了解声线在工件中的传播路径有助于检测工艺的设计和检测能力的验证。对于结构复杂、材质特殊的工件，声线的传播不是直线，声线传播路径的计算显得更为必要。该方法的主要应用是模拟声线在奥氏体不锈钢等非均质各向异性介质中的传播。该方法处理过程主要分三大步：① 求解各向异性介质的弹性波波动方程，得到能量速度方向及质点位移方向；② 沿着能量速度方向步进一个距离，对于非均质介质，划分成均质区域给出适当的边界条件；③ 计算边界上的反射和折射声线，利用边界条件计算反射和折射声线的振幅。该方法给出的结果为声线在介质中的传播状态，无法给出声场强度分布图，所以不适用于声场的定量计算。

导波与体波都受同一组偏微分方程控制，但是导波的求解需要满足波导介质的边界条件。由于导波在上下边界的反射和波形转换作用，导致最终的传播形式为无数种模态，同时波导介质存在频散特性。为了研究导波的传播规律，必须首先求得各种模态的频散曲线，常用的解析方法是势函数法和子波分析法。首先推导出频散方程，然后再利用数值方法求解得到各种频散曲线。导波声场可以表示为无数种模态的叠加，但在实际计算中，往往将导波分离为具有代表性的几种模态，分别计算各种模态的传播及反射和透射过程，这就是模态分解法[8]。

只有规则散射体的远场散射振幅才能用解析法求解。求解的一般步骤是首先用变量分离法得到传输方程和程函方程，然后根据方程的特性写出解的形式，最后带入边界条件求得远场散射振幅。对于圆柱形散射体，解的形式为贝塞尔函数形式；对于球形缺陷，通常将解的形式写为勒让德函数形式。对于弹性球体和空心球体，在求解过程中只是球体表面的边界条件不同。对于平面型缺陷，主要考虑入射声场在平面上的反射和在平面边缘处的衍射，此时先写出各个区域的声压表达式，然后将极坐标波动方程的解写为贝塞尔级数形式，带入边界条件求解。

1.2.2 数值法

当使用严密的数学解析解遇到困难时，通常引入数值法。数值法是一种基于全局离散的近似方法，能够处理各类复杂问题，因而广泛应用于工程实际及力学、传热学、电磁学和声学等的计算与分析。也正是由于其全局离散的特点，使得数值法的计算速度较慢，对计算机性能要求高。在超声检测的模拟与计算中，常用的数值法包括有限元法(finite element method, FEM)、有限差分法(finite difference method, FDM)、边界元法(boundary element method, BEM) 和弹性动力学有限积分技术(elastodynamic finite integration technique, EFIT)。各种方法几乎适用于任意检测情况的模拟，如模拟相控阵超声检测时，只需要将探头发射表示为一组带有时间延迟的位移边界条件，在模拟缺陷回波时，同样对各个回波做时间延迟处理即可。

有限元是工程计算领域常用的一种数值方法[9]，其理论基础是分割原理和能量原理。其计算过程为首先将介质离散成一定数目和形状的网格单元，然后选择位移插值函数，利用位移插值函数将节点位移表示为单元内任一点的位移、应变和应力，再利用最小势能原理或虚功原理建立单元的有限元方程，将单元刚度矩阵组装成整体刚度矩阵，最后引入位移边界条件求解结构平衡方程，得到未知节点位移，进而计算单元应力或节点应力。在处理波动问题时，为了提高计算精度，有限元网格尺寸一般要控制在 $\lambda/20\sim\lambda/10$（其中 λ 为最小波长），而超声检测都是在波长较小的高频范围，这样会导致网格数量的增加，对计算机内存需求高且计算速度慢，因此有限元法目前的应用多为模拟二维的、较薄的工件检测。有限元的优点是能够采用四边形或三角形等多种网格形状，从而可以划分任意几何形状的介质和缺陷。在处理缺陷时，假设缺陷表面的位移场为零，并以此作为边界条件计算，所得解的形式为声波传播的瞬态图和任意一节点位移变化的波形图。在处理缺陷散射时，为了减少计算量且保留 FEM 方法的优势，可以将半解析法与 FEM 结合使用，只对缺陷周围较小的部分进行网格划分，其他区域的声场采用半解析法计算。在导波计算中，为了减少计算量同时保留 FEM 方法的优势，也采用 FEM 和半解析法结合的方式，即假设导波以简谐方式沿着波导介质传播，这样只需要在波导截面上进行有限元网格划分，在传播方向上用简谐表达式表示波的传播，即可获得比有限元等方法具有更快的计算速度。由于采用有限单元的方法来描述截面，半解析有限元法（semi-analytical finite element，SAFE）可以用于任意截面形状的波导介质。

有限差分法是一种用来模拟弹性波传播的数值方法[10]。利用有限差分法进行超声检测数值模拟的步骤是，首先将传播介质划分成交错的网格，有限尺寸的探头作为初始条件施加到相应网格单元，然后将波动方程近似写成差分形式，从而将各节点的应力和位移用交错的差分函数表示，最后利用差分表达式计算所需时刻的声场瞬态传播图。有限差分法采用的是标准四边形网格，因此在处理规则边界时非常有效，对非规则边界的处理则不如有限元方法方便。有限差分形式和格式多样，形式有前方差、后方差和中心差，格式有 Lax-Freidrichs、Leap-Frog 和 Crank-Nicholson 格式，各种格式有不同等级的误差项，在计算时需要合理选择，才能减小计算误差。在网格尺寸和缺陷边界的处理方法上，有限差分法和有限元法基本相同。

边界元法是以积分方程为基础，结合有限元的离散技术而发展起来的一种数值方法[11]。该方法是用波动方程的基本解建立边界积分方程，然后利用边界的离散得到离散算式。和有限元法相比，边界元法有很多优势：由于只是对边界进行离散，减少了方程组的未知数，减少了计算的盲目性，从而减小了计算量，并且计算误差只来自于离散的边界，这样也减少了误差的来源；由于采用加权余量法得到积分

方程，使得误差合理分配，同时避免了寻找泛函的麻烦。目前边界元法多用于导波计算，只需要在波导和结构的缺陷边界划分网格节点。而对于导波检测而言，介质中经常存在多种导波模态，所以常常引入简正模态展开法和边界元一起求解导波散射问题。简正模态展开法的基本思想是将原函数展开成具有完备性和正交性的特征函数的叠加形式，特征函数的完备性可保证展开式的合理性，正交性用于求解展开后各项的振幅系数。

弹性动力学有限积分技术是德国学者首先提出的一种主要用于模拟非均质介质超声波检测的数值计算方法[12]。EFIT 的基本思想是将介质离散成交错的网格，计算每个单元的体积和表面积分以及应力速度关系式，并假设每个单元格的六个表面的应力应变完全一样。这在数学上表示为将有限积分技术(FIT)应用到离散的麦克斯韦方程组，得到 EFIT 应力单元格表达式。相比于其他计算方法，EIFT 在计算非均质材料时有明显的优越性。然而，非均质材料，特别是缺陷处的网格划分必须要保证各个网格的应力应变是连续的，交错网格的划分必须满足 EFIT 方法的稳定性和收敛条件。这在一定程度上限制了 EFIT 的应用。

1.2.3 半解析法

解析法具有速度快的特点，但只能用于简单情况，数值法应用广泛，但是计算量大。为了在保证计算精度的同时提高计算速度，人们提出了半解析法。半解析法可以说是一种在计算过程中采用部分解析解或解析函数的数值方法。基于已有解析解的研究成果，有针对性地代替部分离散和插值，可以弥补数值法的不足，解决解析法所不能解决的问题。目前，半解析法已经成为超声检测模拟与计算的主流方法。利用解析法计算探头发射声场时，一般采用将探头表面离散成点源的方法，如瑞利积分和离散点源法(distributed point source method, DPSM)，然后在利用如 Pencil 法等方法来描述点源声场在介质中的传播；在处理缺陷散射问题时，常常根据缺陷性质的不同，采取不同的近似方法来处理，有的方法需要将缺陷表面离散，如基尔霍夫近似理论，有的方法需要将缺陷边缘离散，如几何衍射理论(GTD)，有的方法不需要离散缺陷，如波恩近似理论。

由瑞利积分和 Pencil 法建立声场计算模型的算法是将探头离散成点源，独立计算每个点源传播到计算点处的振幅和相位，点源声束在每个界面处的透射系数由应力应变连续性条件计算，最后将所有点源产生的声场叠加得到计算点声压[2]。在考虑工件中的声场时，需要考虑声束在工件和探头界面处透射和传播过程中的能量衰减，声束在界面处的能量损失可以用折射系数 Tra 来表示，Tra 可以通过应用界面处应力应变的连续性条件建立的方程组求得；声束在传播过程中的能量损失可以用传播衰减因子来表示，传播衰减因子通过 Pencil 法计算。由于采用点源叠加方法，本模型可以模拟任意探头的发生声场，如聚焦探头、双晶探头、相控阵探

头等；可以模拟声场在任意复杂界面处的反射和透射及在任意介质中的传播，如各向异性和非均质介质等。

基于基尔霍夫近似理论建立的裂纹回波模型用于处理各种体积类缺陷（不含夹杂）和裂纹类缺陷[13]。依据基尔霍夫近似理论，散射体任意点处的表面近似地由该点切平面上的平面反射体替代，表面的任意一点都产生平面界面的反射，该点的总场强由过这一点的切平面反射特性决定。本模型算法是首先将缺陷离散，然后单独计算每个缺陷点所产生的衍射回波，最后将所有离散点产生的回波叠加得到缺陷回波。然而基尔霍夫近似忽略了二次衍射项，不能计算裂纹尖端衍射产生的沿裂纹表面传播的瑞利波。

基于GTD理论建立的边缘回波模型作为裂纹回波模型的补充，用于处理裂纹尖端衍射[1]。当入射声束与裂纹夹角较小时，衍射回波主要由两个尖端产生。入射声束首先在近端衍射产生衍射回波和沿裂纹表面传播的瑞利波，瑞利波在远端再次衍射产生远端衍射回波[14]。依据几何衍射理论，尖端衍射回波是基于散射场的二次渐进。本模型算法也是离散裂纹边缘，然后单独计算表面各点衍射回波，最后将各点衍射回波叠加得到缺陷回波，但是由于衍射法则的影响，计算时要排除声束不能到达计算点的点源。目前，衍射时差法（time of flight diffraction，TOFD）超声波检测技术正是利用裂纹尖端的衍射回波来对缺陷进行定位定量，因此该模型不失为TOFD检测模拟的一种有效模型。

前面两个缺陷回波模型都是基于高频近似，适用于尺寸较大的体积型和面积型缺陷，对于尺寸较小的夹杂，用上述两种方法处理误差较大。引入基于低频近似的波恩近似理论来建立声场与缺陷相互作用模型可以准确模拟夹杂类缺陷回波[14]。本模型算法是用量子力学中的积分方程代替了传统的偏微分方程来描述超声场散射问题，用精确迭代法求解积分方程，得到渐进的波恩级数解。波恩近似是取无限级数的第一项作为近似解，即用入射场取代散射体内的未知的位移场，最终得到纵波和横波散射场远场表达式。

1.3 发展前景

从宏观上看，现代超声无损检测技术已成为信息技术的一部分，无损检测的技术核心是定量的获取与分析缺陷的真实信息。信息技术发展中的智能化、自动化、图像化、小型化、系列化、多功能化，也是无损检测技术的发展与应用方向，而数字化正是联系它们的桥梁和技术核心。

工业超声检测技术的发展必将是以软件为主导的技术开发，在发展过程中必须结合计算机技术、虚拟现实技术等，并在发展自身理论的同时借鉴其他领域的超声计算模型及算法，如超声医学诊断技术中的有关医学生物组织模型、医学超声成

像算法等。

由于组织的类型和状态不同，生物组织的超声传播特性存在差异，其中声阻抗、声速和衰减系数等作用重大；医学超声检测中由于生物组织的散射作用，常常存在背景噪声；人体组织从外向内可分为表皮、真皮、皮下组织、脂肪、肌肉以及深处的内脏器官和骨组织等层次，可以近似多层介质[15]。这些特性都与工业超声检测中的检测对象相似。因此，将医学超声建模的研究成果引入工业超声检测是完全可行的。医学超声中的非均匀介质模型和分离散射子模型即是用来模拟组织背景噪声的模型，可以用于研究非均质介质工件中的散射衰减，分层介质模型可以用于研究多层介质工件中的各个界面的反射和透射。

随着相控阵、TOFD 和自动检测等技术的发展，超声成像在工业检测中发挥越来越重要的作用。是否可以得到高质量、高帧率的 B 扫描和 C 扫描等形式的图像成为检测可靠性的重要影响因素。而目前医学超声成像的研究已经取得很大的进展，各种成像方式和成像算法不断出现，具有代表性的有超声弹性成像、合成孔径成像、傅里叶成像和三维成像。超声弹性成像中涉及的反问题求解方法对工业超声成像和信号反演都有很好的借鉴作用；合成孔径成像和傅里叶成像可以得到高分辨率、高帧率图像，特别是傅里叶成像具有成像系统简单、成像速度快的特点；医学三维成像已经能够得到各种组织、胎儿，甚至是心脏的跳动的三维图像，这些无疑对工业超声成像的研究具有指导和借鉴作用[16]。

结合软件开发技术，目前许多发达国家都开发了自己的超声模拟与仿真软件[17]，如 CIVA、Imagine3D、simSUNDT、VNDE、UT-Sim、Wave3000 Pro 等。这些软件有的已经商用，有的目前仅限于实验室研究，有的用于检测人员培训，有的用于信号分析和工艺设计。随着超声模拟的不断发展，必将有更多更优质的软件来辅助检测人员进行检测，提高检测可靠性。

虚拟现实技术是指利用计算机和虚拟现实硬件及软件所构成的虚拟现实环境，并通过多种虚拟现实交互设备使参与者投身于虚拟现实环境中。超声计算模型的建立为超声检测虚拟现实平台的搭建，提供了基础[18]，虚拟现实技术的引入将会使超声仿真软件的发展达到另一个层次，虚拟现实技术的沉浸感、交互性、想象力、动态交互智能感和程序驱动三维立体模型与场景等特点将会使检测人员得到更有效的培训，各种三维场景的出现将会使得缺陷的定位定量更为直接、便捷。

参 考 文 献

[1] Chapman R K, Pearce J E. Recent in-house developments in theoretical modelling of ultrasonic inspection[J]. Insight NDT, 2007, 49(2): 93-97.

[2] Gengembre N. Modelisation du champ ultrasonore rayonne dans un solide anisotrope et

heterogene par un traducteur immerge[D]. These de Doctorat de l' universite Paris VII,1999.

[3] 丁辉等. 超声检测计算模型的建立与仿真软件的开发[J]. 无损检测, 2009, 31(8): 614-618.

[4] Belgroune D. A theoretical study of ultrasonic wave transmission through a fluid-solid interface[J]. Ultraonics,2008, 48(3):220-230.

[5] Wen J J. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams[J]. Journal of Acoustic Society of American,1988,85(3):1752-1756.

[6] Song S J. Comparison of modeling approaches to ultrasonic testing at near critical angles [J]. Ultrasonics,2004,42(1):283-289.

[7] Ye J. Development of an ultrasonic ray model for phased array ultrasonic testing in austenitic weldments[C]. 17th World Conference on Nondestructive Testing, 25-28 Oct 2008, Shanghai, China,2008.

[8] Rose J L. Ultrasonic Waves in Solid Media[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[9] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社,2003.

[10] 李太宝. 计算声学[M]. 南京:南京大学出版社,2003.

[11] Lee C M. Guided Elastic Waves in Structures with an Arbitrary Cross-section[D]. Philadelphia: The Pennsylvania State University, 2006.

[12] Fellinger P, Marklein R. Numerical modeling of elastic wave propagation and scattering with EFIT-elastodynamic finite integration technique[J]. Wave Motion, 1995, 21(1): 47-66.

[13] Lhemery A. A model for the transient ultrasonic field radiated by an arbitrary loading in a solid [J]. Journal of Acoustic Society of American, 1994, 96(6):3776-3786.

[14] Gubernatis J E. Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials[J]. Journal of Applied Physics,1977,48(7):2804-2811.

[15] 白净. 医学超声成像机理[M]. 北京:清华大学出版社,1998.

[16] 彭虎. 超声成像算法导论[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2008.

[17] 单洪彬,李明,程怀东. 国外超声检测仿真软件的研究进展[J]. 无损检测, 2008, 30(7): 1-6.

[18] 张俊等. 基于实时声场计算的超声检测虚拟现实系统开发[C]. 电力系统第11届无损检测会议, 西宁,2009:147-151.

第 2 章　探头的发射声场

工业检测和医学诊断所应用的超声波都源自探头晶片的振动，因此准确地计算探头发射声场是定量研究超声传播过程的基础。不同的探头类型，可以激发出不同的波形，如体波、表面波、导波等，不同波形均有不同的声场计算方法。

2.1　声场基本方程

2.1.1　固体介质的波动方程[1,2]

基于能量守恒定律、动量守恒定律及介质的状态方程，并结合小振幅近似，固体弹性介质中的声场的线性方程为

$$\rho \nabla^2 u_i = C_{ijkl} u_{k,jl} + f_i \tag{2.1.1}$$

式中，ρ 表示介质密度；u 表示质点位移；C 表示弹性系数；f 表示外力作用。式(2.1.1)为有源声波方程。当不存在外力作用时，无源声场方程为

$$\rho \nabla^2 u_i = C_{ijkl} u_{k,jl} \tag{2.1.2}$$

式(2.1.2)也称为亥姆霍兹方程，该方程主要用于声波在半无限大空间的传播。

根据弹性系数的不同，固体介质可以分为各向异性和各向同性；根据微观结构的均匀性，可以分为均质介质和非均质介质。声场在以上各类介质中的传播特性不尽相同，在这里先给出均质各向同性介质的声场方程，其他类型介质中的声场方程将在后面的章节讨论。

在各向同性固体介质中，引入拉梅常数，声场方程可以改写为

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla u - \mu \nabla \times \nabla \times u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1.3}$$

式中，λ、μ 为拉梅常数。利用亥姆霍兹分解，将位移矢量 u 表示为标量的梯度和零散度矢量的旋度，即

$$u = \nabla \varphi + \nabla \times H \tag{2.1.4}$$

则声场方程(2.1.3)，可以分解为两个简单的声场方程(2.1.5)和式(2.1.6)

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{2.1.5}$$

$$\nabla^2 H = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \tag{2.1.6}$$

式中

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\ ,\quad c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{2.1.7}$$

c_T 和 c_L 分别为各向同性固体中两种体波——横波和纵波的速度。

2.1.2　流体介质的波动方程

流体介质中只存在纵波，一般用声压作为声场的特征量，声场方程可以写成

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 p}{\partial t} - \nabla^2 p = 0 \tag{2.1.8}$$

式中，c 为纵波波速；p 为声压。在处理流体介质的声场问题时，通常会涉及三个特征量及其相互关系，即声压 p、质点速度 v 和速度势 φ：

$$v = \nabla\varphi \tag{2.1.9}$$

$$p = \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{2.1.10}$$

$$v = \frac{p}{\rho c} \tag{2.1.11}$$

式(2.1.3)和式(2.1.8)分别给出了固体和流体介质中的声场基本方程，但这只是声传播必须遵循的一般规律，在考虑具体的探头发射声场及声场传播特性时，还必须考虑探头和被检物体所确定的初始条件和边界条件，而且还应该根据实际情况，尽可能地简化计算过程，以求达到实际应用要求。

2.1.3　声束在界面处的透射和反射[2]

超声传播过程存在声束穿过一个或多个介质界面的情况，因此不同界面处的透射和反射系数计算、界面处波形转换后各种波形的能量分配研究等是超声计算的重点。

1. 固固界面

假定介质 1 和介质 2 为各向同性，两种介质分别位于坐标系的上下半无限空间，如图 2.1 所示。

当入射波为横波时，根据应力应变连续性条件：

$$\begin{aligned}
&v_y:(v_T^I)_y + (v_T^R)_y + (v_L^R)_y = (v_T^T)_y + (v_L^T)_y\\
&v_z:(v_T^I)_z + (v_T^R)_z + (v_L^R)_z = (v_T^T)_z + (v_L^T)_z\\
&\sigma_{yy}:(\sigma_T^I)_{yy} + (\sigma_T^R)_{yy} + (\sigma_L^R)_{yy} = (\sigma_T^T)_{yy} + (\sigma_L^T)_{yy}\\
&\sigma_{yz}:(\sigma_T^I)_{yz} + (\sigma_T^R)_{yz} + (\sigma_L^R)_{yz} = (\sigma_T^T)_{yz} + (\sigma_L^T)_{yz}
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

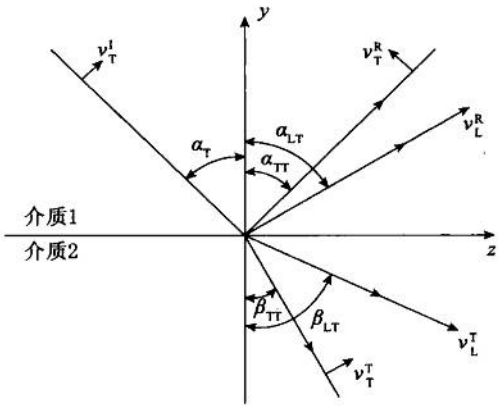


图 2.1 声束在固固界面的反射和透射(入射波为横波)

式中，v_n^m 表示质点振动速度，其中 m 为字母 R、T 和 I，分别表示反射波、透射波和入射波；n 为字母 L 和 T，分别代表纵波和横波。将质点速度和应力条件带入连续性条件，得到反射、透射系数方程：

$$M\begin{bmatrix} A_{sp} \\ A_{ss} \\ D_{sp} \\ D_{ss} \end{bmatrix} = A \tag{2.1.13}$$

式中，A_{sp} 和 A_{ss} 分别表示纵波反射系数和横波反射系数；D_{ss} 和 D_{sp} 分别表示纵波透射系数和横波透射系数。M 为一个 4×4 矩阵

$$M = \begin{bmatrix} -\cos\theta_{1LT} & \sin\theta_{1TT} & -\cos\theta_{2TL} & \sin\theta_{2TT} \\ -\sin\theta_{1LT} & -\cos\theta_{1TT} & \sin\theta_{2TL} & \cos\theta_{2TT} \\ -k_{L1}(\lambda_1+2\mu_1)\cos2\theta_{1TT} & k_{T1}\mu_1\sin2\theta_{1TT} & k_{L2}(\lambda_2+2\mu_2)\cos2\theta_{2TT} & -k_{T2}\mu_2\sin2\theta_{2TT} \\ -k_{L1}\mu_1\sin2\theta_{1LT} & -k_{T1}\mu_1\cos2\theta_{1TT} & -k_{L2}\mu_2\sin2\theta_{2TL} & -k_{T2}\mu_2\cos2\theta_{2TT} \end{bmatrix} \tag{2.1.14}$$

A 为一个 4×1 矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} \sin\theta_{1T} \\ \cos\theta_{1T} \\ -k_{T1}\mu_1\sin2\theta_{1T} \\ -k_{T1}\mu_1\sin2\theta_{1T} \end{bmatrix} \tag{2.1.15}$$

当入射波为纵波时，只需将矩阵 A 替换为以下形式，即可计算相应的反射、透射系数：

$$A=\begin{bmatrix} -\cos\theta_{1L} \\ \sin\theta_{1L} \\ k_{L1}(\lambda_1+2\mu_1)\cos 2\theta_{1L} \\ -k_{L1}\mu_1\sin 2\theta_{1L} \end{bmatrix} \tag{2.1.16}$$

2. 液固界面

液体中的剪切应力消失，不存在横波。透射、反射系数方程可以写为

$$M\begin{bmatrix} A_{pp} \\ D_{pp} \\ D_{ps} \end{bmatrix}=A \tag{2.1.17}$$

式中，A_{pp}表示纵波反射系数；D_{pp}表示纵波透射系数；D_{ps}表示横波透射系数。

M 简化为以下的 3×3 矩阵：

$$M=\begin{bmatrix} -\cos\theta_{1LL} & -\cos\theta_{2LL} & \sin\theta_{2LT} \\ 0 & k_{L2}(\lambda_2+2\mu_2)\cos 2\theta_{2LT} & -k_{T2}\mu_2\sin 2\theta_{2LT} \\ 0 & -k_{L2}\mu_2\sin 2\theta_{2LL} & -k_{T2}\mu_2\cos 2\theta_{2LT} \end{bmatrix} \tag{2.1.18}$$

A 简化为以下 3×1 矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} -\cos\theta_{1L} \\ k_{L1}\lambda_1\cos 2\theta_{1L} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.19}$$

2.2　角　谱　法

角谱法(angular spectrum method，ASM)的基本思想是将探头发射的波分解成无数个平面波，通过平面波的叠加来计算声场的传播，如图 2.2 所示。

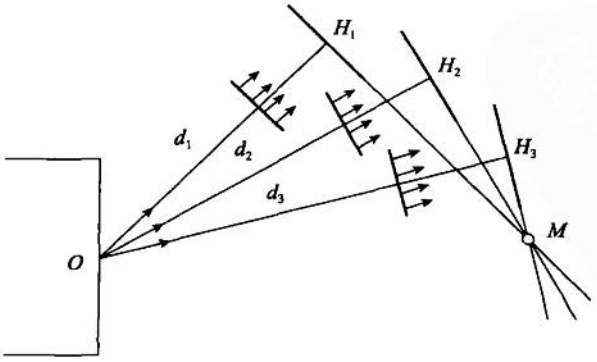


图 2.2　角谱法原理示意图

2.2.1 角谱法计算液体中的声场[3]

依据角谱法的基本思想，图 2.2 声场中某一点 $M=(x,y,z)$ 的声压可以表示无数多个不同平面波的叠加，因此可以写成一个双重积分形式：

$$p(M,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(k_x,k_y)\exp(\mathrm{i}(k_xx+k_yy+k_zz))\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \quad (2.2.1)$$

式中，ω 为角频率；k_x、k_y、k_z 为波矢 k 沿着各个坐标轴方向的分量，相互关系为 $k_z=\pm\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}$。$k_z$ 取正值表示沿 z 轴正方向传播的波，即 $k_z=\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}$。当 $k^2>k_x^2+k_y^2$ 时，$p=\exp(\mathrm{i}k_xx+\mathrm{i}k_yy+\mathrm{i}\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}z)$ 表示沿 z 轴正方向传播的平面谐波；当 $k^2<k_x^2+k_y^2$，$p=\exp(\mathrm{i}k_xx+\mathrm{i}k_yy-\sqrt{k_x^2+k_y^2-k^2}z)$ 表示沿 z 轴正方向呈指数衰减的波，这种波称为非均匀波。所以，式(2.2.1)同时包括了平面波和非均匀波：

$$k_z=\begin{cases}\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}, & k^2\geqslant k_x^2+k_y^2\\ \mathrm{i}\sqrt{k_x^2+k_y^2-k^2}, & k^2<k_x^2+k_y^2\end{cases} \quad (2.2.2)$$

从式(2.2.1)可以看到，计算 $p(k_x,k_y)$ 的值是计算 M 点声压的关键。根据 $z=0$ 时的速度边界条件，从流体波动方程可以得到

$$v_z(x,y,z=0,\omega)=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial z}(x,y,z=0,\omega) \quad (2.2.3)$$

带入式(2.2.1)得到

$$v_z(x,y,z=0,\omega)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}k_zp(k_x,k_y)}{\mathrm{i}\omega\rho}\exp(\mathrm{i}(k_xx+k_yy))\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \quad (2.2.4)$$

令 $V(k_x,k_y)=\mathrm{i}k_zp(k_x,k_y)/(\mathrm{i}\omega\rho)$，则式(2.2.4)简写为

$$v_z(x,y,z=0,\omega)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}V(k_x,k_y)\exp(\mathrm{i}(k_xx+k_yy))\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \quad (2.2.5)$$

式(2.2.5)为二维反傅里叶变换形式，根据傅里叶变换的性质得到

$$V(k_x,k_y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}v_z(x,y,z=0,\omega)\exp(-\mathrm{i}(k_xx+k_yy))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (2.2.6)$$

式(2.2.6)表明，$V(k_x,k_y)$ 为速度场在 $z=0$ 平面的二维空间傅里叶变换。对于半径为 a 的环形活塞型探头：

$$v_z(x,y,z=0,\omega)=\begin{cases}v_0(\omega), & x^2+y^2\leqslant a^2\\ 0, & x^2+y^2>a^2\end{cases} \quad (2.2.7)$$

带入式(2.2.6)积分可以得到

$$V(k_x,k_y)=2\pi a^2v_0(\omega)\frac{\mathrm{J}_1(\sqrt{k_x^2+k_y^2}a)}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}a} \quad (2.2.8)$$

对于矩形的活塞，其中沿 x 和 y 方向的长度分别为 l_x 和 l_y，可以得到

$$V(k_x,k_y)=l_xl_yv_0(\omega)\frac{\sin\left(\frac{k_xl_x}{2}\right)\sin\left(\frac{k_yl_y}{2}\right)}{\left(\frac{k_xl_x}{2}\right)\left(\frac{k_yl_y}{2}\right)} \tag{2.2.9}$$

当已知探头表面声压分布后，空间中的声场表达式为

$$p(M,\omega)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}\omega\rho V(k_x,k_y)}{\mathrm{i}k_z}\exp(\mathrm{i}(k_xx+k_yy+k_zz))\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{2.2.10}$$

当知道 $z=0$ 平面处速度场的二维傅里叶变换后，可以直接将式(2.2.10)用于探头发射声场模拟。然而，因为要对快速振荡的函数进行两次无限积分，这个模型的计算仍然难以实现。因此在实际过程中，经常忽略非均匀波，而对有限个平面波进行积分

$$p(M,\omega)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\iint\limits_{k_x^2+k_y^2\leqslant k^2}\frac{\mathrm{i}\omega\rho V(k_x,k_y)}{\mathrm{i}k_z}\exp(\mathrm{i}(k_xx+k_yy+k_zz))\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{2.2.11}$$

式(2.2.11)是一个更为简化的探头模型，但是仍然需要较大的计算量。

通过以上推导可以看出，角谱法实际上是惠更斯原理的空间频域表现形式，在数值计算中使用了二维傅里叶变换，因而极大地缩短了计算时间，但是由于所得模型需要对很多平面波进行叠加，计算量仍然较大。

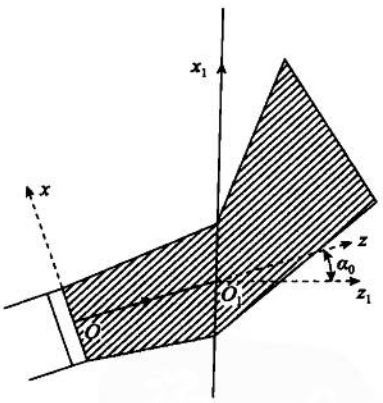


图 2.3　声束透射二维结构示意图

2.2.2　角谱法计算液固界面透射声场[4,5]

如图 2.3 所示二维结构图，O 为探头中心，x 轴为平行探头面方向，z 轴为探头面法线方向，O_1 位于液固界面，x_1 轴为平行于界面方向，z_1 轴为界面法线方向。根据 2.2.1 节的推导，探头表面的声势为

$$\varphi_0(x,t)=\frac{1}{2\pi}\iint\bar{\varphi}_0(k_x,\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}k_xx)\mathrm{d}k_x\mathrm{d}\omega \tag{2.2.12}$$

式中

$$\bar{\varphi}_0(k_x,\omega)=\frac{1}{2\pi}\iint\varphi_0(x,t)\exp(-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}k_xx)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \tag{2.2.13}$$

液体介质中点(x,z)的声势为

$$\varphi(x,z,t)=\frac{1}{2\pi}\iint\bar{\varphi}_0(k_x,\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}k_x x-\mathrm{i}k_z z)\mathrm{d}k_x\mathrm{d}\omega \tag{2.2.14}$$

为了避免计算过程中频率的影响，可将受频率影响的波矢 k 转换为慢度矢量 s，则式(2.2.12)可以写为

$$\varphi_0(x,t)=\int\phi_0(s_x,\omega)\ \exp(-\mathrm{i}\omega s_x x)\mathrm{d}s_x \tag{2.2.15}$$

式中

$$\phi_0(s_x,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\bar{\varphi}_0(\omega s_x,\omega)\ \exp(\mathrm{i}\omega t)\,|\omega|\,\mathrm{d}\omega \tag{2.2.16}$$

探头中心 O 点的声势为

$$\varphi_0(0,t)=\int\phi_0(s_x,t)\mathrm{d}s_x \tag{2.2.17}$$

则液体介质任意一点(x,z)的声势为

$$\begin{aligned}\varphi(x,z,t)&=\frac{1}{2\pi}\iint\bar{\varphi}_0(\omega s_x,\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\omega s_x x-\mathrm{i}\omega s_z z)\,|\omega|\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}s_x\\&=\int\phi_0(s_x,t-s_x x-s_z z)\mathrm{d}s_x\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

根据液体介质中声压与声势的关系

$$p(x,z,t)=-\rho_0\frac{\partial\varphi(x,z,t)}{\partial t} \tag{2.2.19}$$

则液体中的声压表达式可以写为

$$p(x,z,t)=\rho_0\int\frac{V_0(s_x,t-\tau_0)}{s_z}\mathrm{d}s_x \tag{2.2.20}$$

式中

$$V_0(s_x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\overline{v_0}(s_x,\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t)\,|\omega|\,\mathrm{d}\omega \tag{2.2.21}$$

在固体介质中其应力场为

$$\varphi(x_1,z_1,t)=\int T(s_x)\cdot\phi_0(s_x,t-\tau_0)\mathrm{d}s_x \tag{2.2.22}$$

式中，$T(s_x)$表示声势透射系数；τ_0 为由探头原点 O 到达计算点 M 的时间延迟。按照液体介质中的推导过程，可以得到各向同性固体中的应力表达式为

$$\sigma_n(x_1,z_1,t)=-\rho\int T\left(\frac{V_0(s_x,t-\tau_0)}{s_z}\right)\mathrm{d}s_x \tag{2.2.23}$$

2.2.3 应用实例[4]

用角谱法计算图 2.4 所示探头发射声场在水钢界面处透射的透射声场，所得结果如图 2.5～图 2.7 所示。探头半径为 8.1mm、频率为 5MHz、探头中心到界面距离为 10mm。

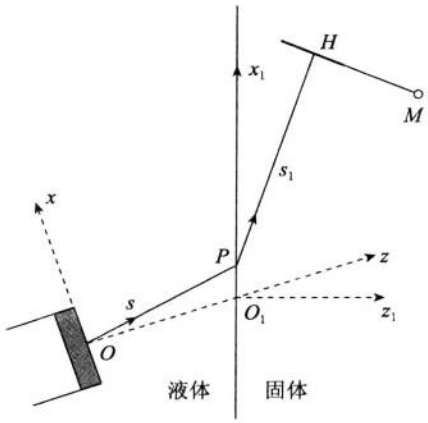


图 2.4　活塞型探头发射声场在平界面的透射

图 2.5 为声束垂直入射时，在 $t=8\mu s$ 时刻的声场传播瞬态图。探头激发的脉冲可以分为直达波和边缘波，直达波为平面波，边缘波从探头边缘出发，其波阵面一般为圆弧形。图 2.5(a)为纵波图，可以看到，直达波为平面波，两个边缘波的波阵面是以探头端点为圆心的圆弧形，大小相等。边缘波的振幅远小于直达波。图 2.5(b)为横波图，可以看到，只存在边缘波，不存在直达波，因为垂直入射的纵波不产生横波，但是由于界面和声场相交区域的横向位移，产生了边缘波，显然，这些

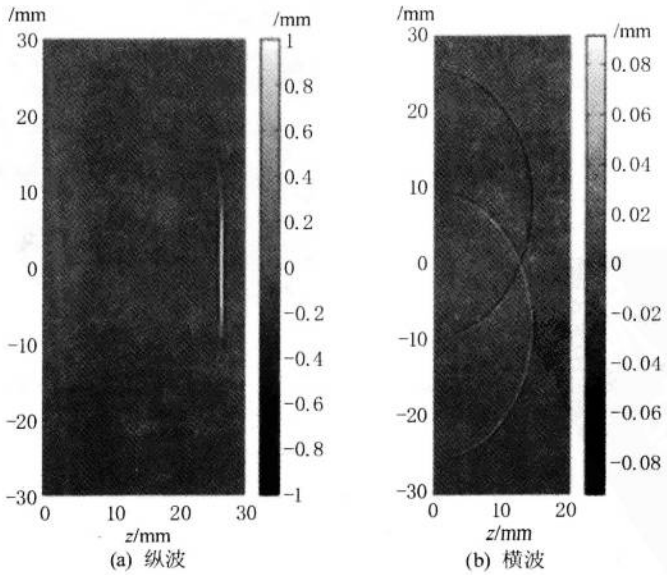


图 2.5　$t=8\mu s$ 时刻的声场传播瞬态图(垂直入射)

波的振幅远小于纵波。

图 2.6 为纵波在距离界面 8mm 处的波形图，在轴线上($x_1=0$)，可以观察到两个脉冲，一个是直达波，一个是边缘波的叠加。当不在轴线上($x_1=2$mm)时，出现两个极性相反的边缘波，在探头阴影区域($-8.1\text{mm}<x_1<8.1\text{mm}$)，直达波几乎没有改变。当在探头阴影区域之外($x_1=16$mm)时，直达波消失，只出现两个极性相反的边缘波，其中远端边缘波被延迟，振幅较小。

图 2.7 为纵波声束临界角入射时，在 $t=13\mu$s 时刻的声场传播瞬态图。纵波能量在界面处聚集，界面的边界条件促使一部分纵波向横波转换，在图中记为 SW，从而形成了头波，在图中标记为 HW；剩下的一部分纵波则在界面附近形成近表面波，在图中标记为 CW，其最大振幅出现在与界面法线呈 80°的位置。从图可以看到存在两个边缘波，分别标记为 A 和 B，边缘波的波阵面为圆弧形，在大角度区域传播。

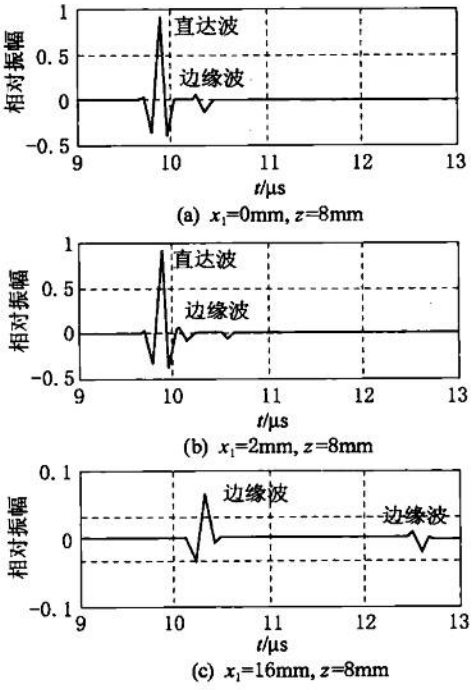


图 2.6 距界面 8mm 处纵波波形图

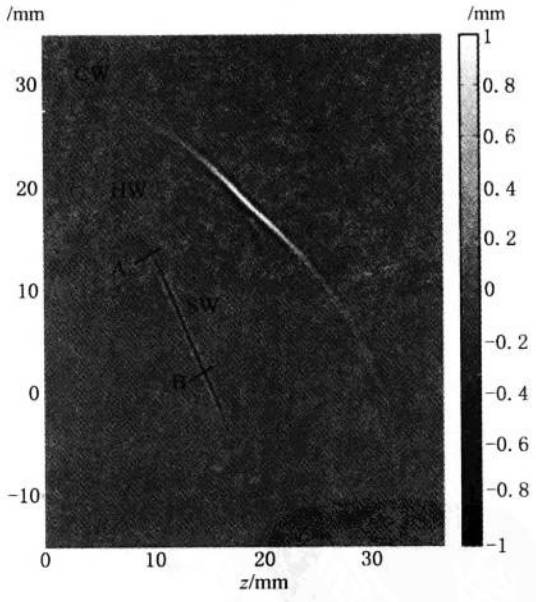


图 2.7 $t=13\mu$s 时刻的声场传播瞬态图（纵波声束临界角入射）

2.3 瑞利积分法

瑞利积分法(Rayleigh integration method，RIM)基本思想是将探头离散成点源，将空间中任意一点的声压表示成探头上所有离散点源在该点产生的声压的叠

加。由于瑞利积分能够解析的情况很少，一般只能用数值方法或者近似方法计算。大多数学者在利用瑞利积分法计算声场时，通常采用与其他方法或模型（如 Pencil 法、驻相法、边界衍射积分法、边缘单元法等方法）相结合的方式来计算探头的发射声场及在各种介质中的传播。其中基于瑞利积分和 Pencil 法建立的声场计算模型已成为目前声场计算的主流模型，并成功应用于商用软件，该模型可以用于处理任意探头（聚焦探头、费马探头、相控阵等）、任意界面（曲界面、不规则界面）、复杂材质（多层各向异性）等情况。

2.3.1　瑞利积分一般公式[6]

点源的响应可以用格林函数 $G(r_T,r)$ 表示，将其带入亥姆霍兹方程得到

$$\nabla^2 G(r_T,r)+k^2 G(r_T,r)=-4\pi\delta(r_T-r) \tag{2.3.1}$$

式中，$\delta(r_T-r)$ 是狄拉克脉冲函数，当求解得到点源声场之后，任意声源产生的场可以写为

$$p(r)=\iint_S\left[G(r_T,r)\frac{\partial p}{\partial n}-p\frac{\partial G(r_T,r)}{\partial n}\right]ds \tag{2.3.2}$$

式(2.3.2)称为基尔霍夫公式，即声压 $p(r)$ 可以由包含 r 的一个闭合曲面上的声压和声压的法向微分来积分得到。

对于自由空间的点声源，格林函数为

$$G(r_T,r)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-ik(r_T-r)}}{|r_T-r|} \tag{2.3.3}$$

在闭合面法向求导

$$\frac{\partial G(r_T,r)}{\partial n}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ik(r_T-r)}}{|r_T-r|} \tag{2.3.4}$$

根据声压和质点速度间关系

$$\frac{\partial p}{\partial n}=i\omega\rho v_n \tag{2.3.5}$$

将式(2.3.3)～式(2.3.5)带入式(2.3.2)，可以得到空间中任意点的声压为

$$\begin{aligned}p(r)&=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{e^{-ik(r_T-r)}}{|r_T-r|}i\omega\rho v_n-p\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ik(r_T-r)}}{|r_T-r|}\right]ds\\&=\frac{1}{2\pi}\iint_S i\omega\rho v_n\frac{e^{-ik(r_T-r)}}{|r_T-r|}ds\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

式(2.3.6)即为瑞利积分表达式，它可以看做是面积为 S 的面源的发射声场用每个点源 dS 的声场响应的叠加来表示，也是惠更斯原理的一种表示方法。

空间中任意点速度势的瑞利积分表达式为

$$\varphi(r,t)=\iint_T\frac{v_n(r_T,t-|r-r_T|/c)}{2\pi|r-r_T|}dS(r_T) \tag{2.3.7}$$

式中，$\varphi(r,t)$表示耦合介质中点 r 在时刻 t 的速度势；r_T 探头表面的点源位置；v_n 表示探头表面点源在时刻 t 的振动速度；$|r-r_T|$ 表示从点源到计算点 r 处的距离；$|r-r_T|/c$ 是指声波从点源处传播到计算点处的时间；T 表示探头；$dS(r_T)$ 表示探头点源 r_T 的面积。

2.3.2 Pencil 法[7~9]

Pencil 法首先应用于电磁波领域，用来描述点源发射的电磁波在多个曲界面处的透射和反射的振幅衰减。在弹性介质中，距离点源足够远的计算点处的声波可以被近似地认为是平面波，平面波的振幅随着传播距离的增加而不断减小。在这里，Pencil 法将用于计算点源发射的波在传播过程中的振幅衰减，记为 DF。如图 2.8 所示，Pencil 是点源发射的一束射线，在传播过程中会产生发散，振幅衰减 DF 可以用 Pencil 的截面积 S 和固体角 Ω 求得

$$DF^{-2} = d\Omega/dS \tag{2.3.8}$$

为了计算截面积 S 和固体角 Ω，首先用声束矢量 $\Psi(dx,dy,ds_x,ds_y)$来描述声束的传播方向及其近轴，如图 2.9 所示。其中，dx、dy 表示平面波在轴线上的位置；ds_x 和 ds_y 表示近轴声线的慢度矢量在波阵面上的投影。点源处的声束矢量为 $\Psi(0,0,ds_x,ds_y)$，计算点处的声束矢量为 $\Psi'(dx',dy',ds'_x,ds'_y)$，两者之间可以由声束传播矩阵 L 来关联：

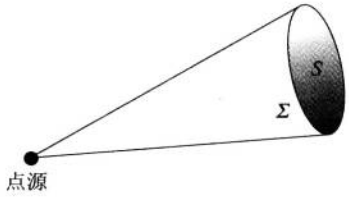


图 2.8 点源声束发散示意图

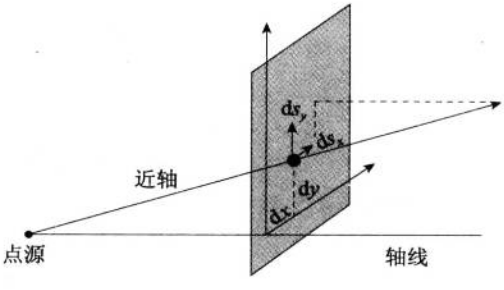


图 2.9 点源发散声束的矢量描述

$$\Psi' = L\Psi = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\Psi \tag{2.3.9}$$

式中，A、B、C、D 均为 2×2 的矩阵。若将 Pencil 的截面积和固体角分别表示为 $d\Omega = ds_x ds_y/s^2$，$dS = dx'dy'$，振幅衰减 DF 可以由声束传播矩阵得到

$$DF^{-2} = s^2 \det B \tag{2.3.10}$$

对于不同介质，传播矩阵 L 不同。各相同性介质和各向异性介质的传播矩阵分别如下：

各向同性介质：

$$\Psi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_k/s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r_k/s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Psi \tag{2.3.11}$$

各向异性介质：

$$\Psi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r_k g_{20} & -r_k g_{11} \\ 0 & 1 & -r_k g_{11} & -r_k g_{02} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Psi \tag{2.3.12}$$

式中，r_k 表示沿声束矢量方向的传播距离；$g_{mn}(m,n=0,1,2)$的表达式如下：

$$g_{mn} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial s_x^n \partial s_y^m}\bigg|_{(s_x^0, s_y^0)} \tag{2.3.13}$$

其中，s_x^0 和 s_y^0 表示轴线上的慢度分量。

声束在曲界面发生折射时，用 2×2 的曲率矩阵 C 来描述曲界面，则折射前与折射后界面两点间的传播矩阵 L 表达式为

$$L = \begin{bmatrix} \Theta'\Theta^{-1} & 0 \\ \Theta'^{-\mathrm{T}} h C \Theta^{-1} & \Theta'^{-\mathrm{T}}\Theta^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{2.3.14}$$

式中，Θ 表示波阵面的切平面上的矢量在界面的切平面上在能量方向的投影，是一个 2×2 的矩阵。Θ 在图 2.10 中即表示为入射坐标系(x_1，x_2，x_3)与界面坐标系(u_1，u_2，u_3)之间的关系。一般情况下，Θ 可表示为

$$\Theta = \begin{bmatrix} x_1 \cdot u_1 & x_1 \cdot u_2 \\ x_2 \cdot u_1 & x_2 \cdot u_2 \end{bmatrix} \tag{2.3.15}$$

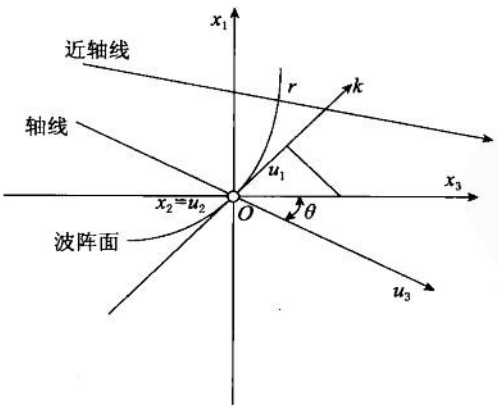


图 2.10　Θ 的几何示意图

所以，当 x 轴与 u 的方向一致时（均是垂直于 Oxz 面），Θ 可以表示为

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3.16}$$

Pencil 法的优点主要在于可以用迭代法计算复杂结构中任意两点间的关系，计算非均质声场时，通常将非均质介质近似为几个均质区域，将均质区域传播矩阵迭代相乘，得到非均质传播矩阵，然后计算偏离因子和声场：

$$\Psi' = L\Psi = L_1 L_2 \cdots L_n \Psi \tag{2.3.17}$$

式中，$L_1, L_2, \cdots, L_n$ 表示声波传播过程中所遇到的各个均质区域的传播矩阵。

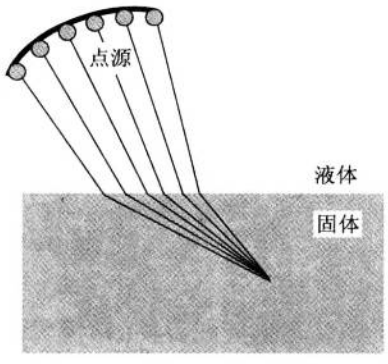


图 2.11 透射后声场计算原理示意图

2.3.3 瑞利积分法计算界面透射声场[9,10]

对于如图 2.11 所示的检测布局，固体中任意一点 M 的声势可以由离散点源在该点产生的声势的叠加来计算。考虑到每个点源到计算点的衰减和在界面处的透射，只需要引入振幅衰减 DF 和透射系数 T 对式(2.3.7)进行修正，即可得工件中点 r 的声势：

$$\varphi(r,t) = \iint_{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{DF} \cdot T \cdot v_n(r_{\mathrm{T}}, t-\Delta t)}{2\pi} \mathrm{d}S(r_{\mathrm{T}}) \tag{2.3.18}$$

对于管道工件，界面为圆柱形，由 Pencil 法得到其 DF 为

$$\mathrm{DF}^{-1} = \sqrt{\left(R_2 + \frac{c_1}{c_2}R_1\right)\left(R_2 + R_1\frac{\cos^2\theta_2}{\cos^2\theta_1}\right) + \frac{R_2 R_1}{R_c}\left(\frac{c_1}{c_2}\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)\left[R_2 + R_1\frac{c_1}{c_2}\frac{\cos^2\theta_2}{\cos^2\theta_1}\left(\sin^2\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\theta_1}\right)\right]} \tag{2.3.19}$$

式中，R_1 和 R_2 分别为在斜楔块和管道中的声程；c_1 和 c_2 分别为在斜楔块和管道中的声速；θ_1 和 θ_2 分别为入射角和折射角；φ 为入射声束与管道横截面夹角；R_c 为管道外壁曲率半径。

对于平界面，即曲率半径无限大，其 DF 为

$$\mathrm{DF}^{-1} = \sqrt{\left(R_2 + \frac{c_1}{c_2}R_1\right)\left(R_2 + R_1\frac{c_1}{c_2}\frac{\cos^2\theta_2}{\cos^2\theta_1}\right)} \tag{2.3.20}$$

2.3.4 应用实例[13~15]

用建立的声场模型可以直接得到计算区域中任意点的相对声压值，实现各种探头发射声场的数字化和可视化（计算程序见附录 1）。图 2.12(a)为斜探头的发

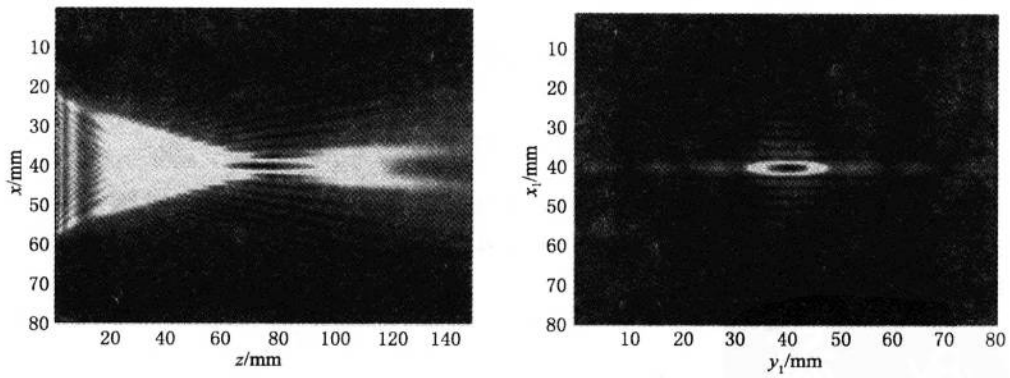
射声场，探头频率为 2MHz，计算区域垂直于工件表面，水程为 20mm。图 2.12(b)为多层介质中的声场分布，探头为 2MHz，声束折射角为 30°，介质为三层，每层的弹性常数和密度不同，从图中可以看到声束在穿过不同声学特性的介质层时发生了明显的偏转。图 2.12(c)为奥氏体焊缝简化模型中的声场分布，探头折射角为 45°，焊缝非均质各向异性。比较图 2.12(a)和(c)，可以看出，声束在非均质各向异性介质中发生了严重的偏转和扭曲。



(a) 探头发射声场　　(b) 多层平行介质声场分布　　(c) 焊缝简化模型声场分布

图 2.12　利用瑞利计算得到的声场分布图

图 2.13 为利用瑞利积分模型计算得到的入射面和声束截面的声压分布图，偏转角为零，焦距为 80mm，晶片发射数为 64，计算得到此时的相控阵探头的焦柱长度为 48mm。



(a) 入射面　　(b) 声束截面

图 2.13　利用瑞利计算得到的相控阵探头发射声场分布图

2.4　多元高斯叠加法

在利用平面波或球面波计算探头发射声场时，需要很多个平面波或球面波进行叠加，而利用高斯型声束计算探头发射声场时，只需要 10^{-3}T 声束叠加，因此大

大提高计算速度。而且高斯声束在多层曲界面等复杂介质的传播可用解析式表示，因此多元高斯叠加法(multi Gaussian beam method，MGB)[16~20]越来越受到关注。

2.4.1 近轴方程

高斯声束是波动方程的近轴解。首先考虑流体中的波传播。假设波动方程的一个沿 z 方向的谐波解

$$p = P(x,y,z)\exp(\mathrm{i}kz) \tag{2.4.1}$$

将式(2.4.1)带入亥姆霍兹方程，得到

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+2\mathrm{i}k\frac{\partial p}{\partial z}=0 \tag{2.4.2}$$

如果声场能量集中在声压轴线附近，可以利用高频近似，使得式(2.4.1)可以表示沿着 z 轴传播的声场的变化，这样意味着衍射项 $\partial^2 p/\partial z^2$ 就变得很小

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\ll\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\ll\frac{\partial^2 p}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\ll 2\mathrm{i}k\frac{\partial p}{\partial z} \tag{2.4.3}$$

若做一个近轴近似，可以得到近轴方程

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+2\mathrm{i}k\frac{\partial p}{\partial z}=0 \tag{2.4.4}$$

2.4.2 单高斯声束的传播

近轴方程(2.4.4)可以有多种形式的解，假设近轴方程的解为沿着 z 轴传播的高斯声束

$$p = P(z)\exp\left(\frac{\mathrm{i}\omega}{2}X^{\mathrm{T}}G(z)X\right) \tag{2.4.5}$$

式中，$P(z)$ 为标量复数；G 为 2×2 对称复数矩阵；X 为坐标矩阵$[x,y]$。式(2.4.5)表示一个沿 z 轴传播的高斯形声束，其幅值在远离 z 轴时呈指数衰减，将其带入近轴方程得到

$$\frac{2}{c}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}+P\mathrm{tr}G+\mathrm{i}\omega PX^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}+G^2\right)X=0 \tag{2.4.6}$$

对任意的 X 都满足方程(2.4.6)，则

$$\frac{2}{c}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}+P\mathrm{tr}G=0 \tag{2.4.7}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}+G^2=0 \tag{2.4.8}$$

式中，$\mathrm{tr}G$ 为矩阵 G 的迹，在射线理论中，式(2.4.7)称为传输方程，用来描述传播过程的振幅变化，式(2.4.8)称为程函方程，用来描述传播过程的相位变化。通过求解这两个方程，即可得到计算点声压。

利用高斯解描述声束在介质中的传播过程，如图 2.14 所示，探头表面的声压分布表示为

$$p(x,y,0) = p_0 \exp\left(\frac{\mathrm{i}k_1 X^{\mathrm{T}}[G_1(0)]^{-1}X}{2}\right) \tag{2.4.9}$$

$$G_1(0) = \begin{bmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{bmatrix}$$

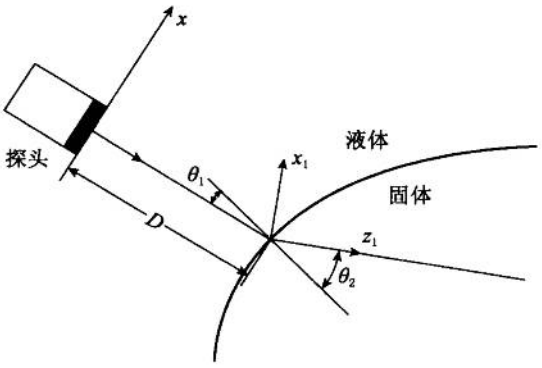


图 2.14　高斯声束在界面处的透射示意图

式中，k_1 表示超声波在液体中的波矢，$k_1 = 2\pi/\lambda$；X 表示液体坐标系中的坐标点(x,y)；q_0 是与声束腰 ω_0 和探头曲率半径 R_0 相关的参数：

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{R_0} + \mathrm{i}\frac{2}{k_1\omega_0^2} \tag{2.4.10}$$

基于近轴近似的高斯声束在传播过程中，振幅和相位的改变都可以用解析表达式描述，而且形式简洁。式(2.4.9)表示的高斯声源写成谐波形式为

$$p(x,y,0) = P(0)\exp(\mathrm{i}k_1\phi(0)) \tag{2.4.11}$$

高斯声束沿着声束轴线传播，在液固界面处的声压可以表示为

$$p(x,y,z=D) = P(D)\exp(\mathrm{i}k_1\phi(D)) \tag{2.4.12}$$

式中，D 表示探头到液固界面处的距离。从式(2.4.12)可以看到，高斯声束沿声束轴向前传播时，其振幅和相位均发生变化。当高斯声束(纵波)穿透液固界面时，发生波形转换。在固体介质中不仅出现纵波声束，还有横波声束，它们分别沿着各自的折射声线传播。声线的折射角度要服从斯内尔定律，因此可以通过声线折射角来区分不同波形。界面固体一侧质点振动的位移用符号 $u_1(x,y,0)$表达。界面附近固体一侧的质点位移也呈高斯分布，也可以把振动位移写成一般表达式：

$$u_1(x,y,0) = U_1(0)\exp(\mathrm{i}k_1\phi_1(0)) \tag{2.4.13}$$

界面处的振动会产生在固体中传播的纵波或横波，在笛卡儿坐标系(x,y,z)中，固体中某质点的振动位移可以写成

$$u_1(x,y,z) = U_1(z)\exp(\mathrm{i}k_1\phi_1(z)) \tag{2.4.14}$$

利用程函方程和传输方程即可求得各式中的振幅和相位的确切表达式，进而完整地描述高斯声束传播的物理过程。

在近轴近似成立情况下，可以把探头发出的声束近似为平面波，方便地描述高斯声束在液体介质、固体介质中传播和在界面处折射的振幅和相位的改变。高斯声束在液体介质中传播，声压振幅逐渐衰减。从探头表面传播至液固界面时，高斯声束的振幅为

$$P(D) = P(0)\frac{\sqrt{\det G_1(0)}}{\sqrt{\det G_1(D)}} \tag{2.4.15}$$

式中

$$G_1(D) = G_1(0) + DI \tag{2.4.16}$$

式中，I 为是二维单元矩阵。

高斯声束在液体介质中传播，声压相位也发生有规律的变化。在近轴近似下，声束传播至液固界面处，相位的表达式为

$$\phi(D) = D + \frac{X^{\mathrm{T}}[G_1(D)]^{-1}X}{2} \tag{2.4.17}$$

当超声波穿透液固界面时，界面液体一侧和固体一侧声压的振幅和相位各不相同，界面处材料的不连续导致了声压的不连续变化。界面两侧高斯声束的振幅满足以下关系：

$$U_1(0) = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega}T\frac{P(D)}{\rho_1 c_1} \tag{2.4.18}$$

式中，ρ_1 表示液体介质的密度；c_1 表示液体介质中的声速；T 表示液固界面的穿透系数。

超声斜入射会在固体工件中产生纵波和横波两种波形，它们的穿透系数分别如下：

$$T_{12}^{\mathrm{L_1L}} = \frac{2\cos\theta_1(1-2\sin^2\theta_{2\mathrm{T}})}{\cos\theta_{2\mathrm{L}} + \frac{\rho_1 c_{2\mathrm{L}}}{\rho_1 c_1}\cos\theta_1\Delta} \tag{2.4.19}$$

$$T_{12}^{\mathrm{T_1L}} = \frac{-4\cos\theta_1\cos\theta_{2\mathrm{L}}\sin\theta_{2\mathrm{T}}}{\cos\theta_{2\mathrm{L}}^{\beta} + \frac{\rho_1 c_{2\mathrm{L}}}{\rho_1 c_1}\cos\theta_1\Delta} \tag{2.4.20}$$

$$\Delta = \left(\frac{c_{2\mathrm{T}}}{c_{2\mathrm{L}}}\right)^2 \sin 2\theta_{2\mathrm{T}}\sin 2\theta_{2\mathrm{L}} + \cos 2\theta_{2\mathrm{T}} \tag{2.4.21}$$

界面固体一侧高斯声束的相位项的表达式如下：

$$\phi_1(0) = D + \frac{X^{\mathrm{T}}[G_2(0)]^{-1}X}{2} \tag{2.4.22}$$

式中，$G_2(0)$为 2×2 矩阵，与高斯声束的入射角和界面的曲率有关：

$$[G_2(0)]_{11}=\frac{\dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}[G_1(D)]_{11}}{\dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}+\dfrac{\kappa_1\left(\cos\theta_1-\dfrac{c_1}{c_2}\cos\theta_2\right)}{\cos\theta_1\cos\theta_2}[G_1(D)]_{11}} \tag{2.4.23}$$

$$[G_2(0)]_{22}=\frac{[G_1(D)]_{22}}{1+\kappa_2\left(\cos\theta_1-\dfrac{c_1}{c_2}\cos\theta_2\right)[G_1(D)]_{22}} \tag{2.4.24}$$

$$[G_2(0)]_{12}=[G_2(0)]_{21}=0 \tag{2.4.25}$$

其中，κ_1、κ_2 分别是 Oxz 平面和 Oyz 平面上界面的曲率。从固体一侧观察，界面向液体侧凸起，那么此时界面的曲率为正值；反之，界面的曲率就为负。

固体介质中的折射声束，式中振幅项如下：

$$U_1(z)=U_1(0)\frac{\sqrt{\det G_2(0)}}{\sqrt{\det G_2(z)}} \tag{2.4.26}$$

$$G_2(z)=G_2(0)+\frac{c_2}{c_1}zI \tag{2.4.27}$$

在近轴近似下，式(2.4.14)中相位项表达式为

$$\phi_1(z)=D+\frac{c_2}{c_1}z+\frac{X^{\mathrm{T}}[G_2(z)]^{-1}X}{2} \tag{2.4.28}$$

将上述的各项表达式组合起来，固体介质中质点振动位移的完整表达式可以写成更为紧凑的形式。为了使公式清晰合理，在公式中引入探头表面质点的振动速度 v_0，于是单高斯声束表达式如下：

$$\begin{aligned}&\frac{-\mathrm{i}\omega u^a(x,y,z)}{v_0}\\&=T\frac{p_0}{\rho_1c_1v_0}\exp(\mathrm{i}k_1D+k_2z)\frac{\sqrt{\det G_1(0)}}{\sqrt{\det G_1(D)}}\frac{\sqrt{\det G_2(0)}}{\sqrt{\det G_2(z)}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}k_1X^{\mathrm{T}}[G_2(z)]^{-1}X}{2}\right)\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

式中，k_1 和 k_2 分别为液体和固体中的波矢。

2.4.3　多元高斯声束叠加计算探头发射声场

利用 15 个高斯声束叠加，可以准确地模拟活塞型探头在液体中的声压分布，表达式为

$$p(x,y,D)=\sum_{n=1}^{15}\frac{\rho_1c_1v_0A_n}{1+\mathrm{i}B_nD/x_{\mathrm{r}}}\exp(\mathrm{i}k_1D)\exp\left(-\frac{B_n(x^2+y^2)/a^2}{1+\mathrm{i}B_nD/x_{\mathrm{r}}}\right) \tag{2.4.30}$$

式中，A_n、B_n 分别表示 15 个复常数，表 2.1 分别列出了相应的数值；x_{r} 表示瑞利距离

$$x_{\mathrm{r}}=\frac{1}{2}k_1a^2 \tag{2.4.31}$$

表 2.1 多元高斯叠加系数

n	A_n	B_n
1	−2.9716+8.6187i	4.1869−5.5160i
2	−3.4811+0.9687i	3.8398−10.8004i
3	−1.3982−0.8128i	3.4355−16.3582i
4	0.0773−0.3303i	2.4618−27.7134i
5	2.8798+1.6109i	5.4699+28.6319i
6	0.1259−0.0957i	1.9833−33.2885i
7	−0.2641−0.6723i	2.9335−22.0151i
8	18.019+7.8291i	6.3036+36.7772i
9	0.0518+0.0182i	1.3046−38.4650i
10	−16.9438−9.9384i	6.5889+37.0680i
11	0.3708+5.4522i	5.5518+22.4255i
12	−6.6929+4.0722i	5.4013+16.7326i
13	−9.3638−4.9998i	5.1498+11.1249i
14	1.5872−15.4212i	4.9665+5.6855i
15	19.0024+3.6850i	4.6296+0.3055i

对于半径为 a 的环形活塞型探头，在固体介质中的声场分布为

$$\frac{-\mathrm{i}\omega u(x,y,z)}{v_0}=T\sum_{n=1}^{15}\frac{A_n}{1+\mathrm{i}B_nD/x_r}\exp(\mathrm{i}k_1D+k_2z)\frac{\sqrt{\det G_2(0)}}{\sqrt{\det G_2(z)}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}k_1X^{\mathrm{T}}[G_2(z)]^{-1}X}{2}\right) \tag{2.4.32}$$

此外，液体介质中的声压振幅及相位分别为

$$(p_0)_n=\rho_1c_1v_0A_n \tag{2.4.33}$$

$$(G_1(0))_n=-\frac{\mathrm{i}k_1a^2}{2B_n}I \tag{2.4.34}$$

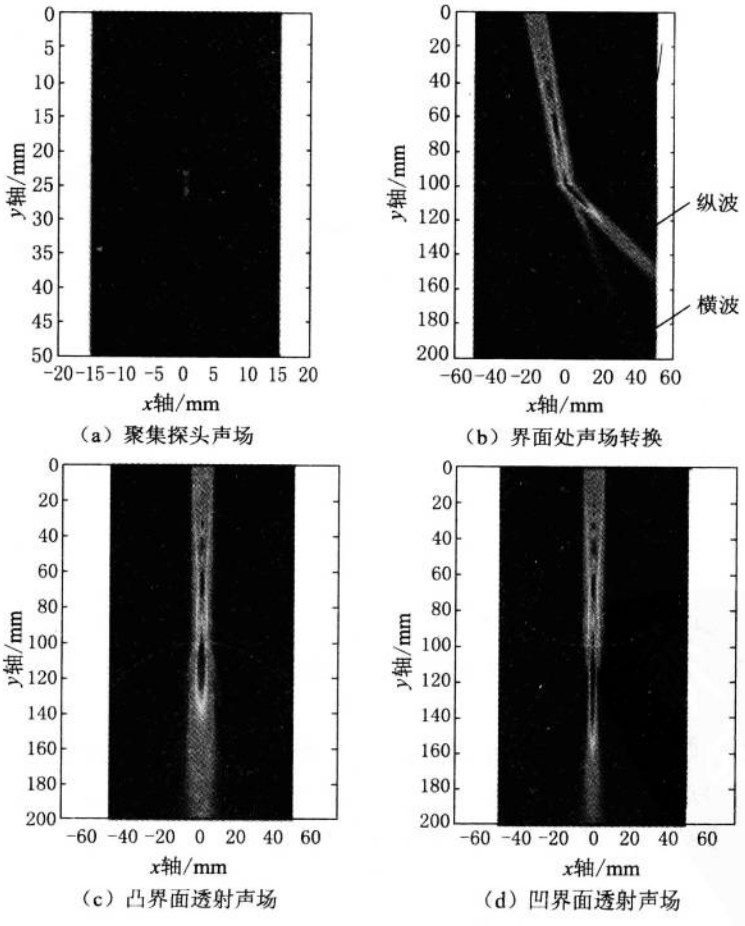
对于几何焦距为 F 的聚焦探头，只需要将式(2.4.32)中的 B_n 用 $B_n+\mathrm{i}k_1a^2/(2F)$ 修正，即为聚焦探头声场分布。

对于矩形探头，其表面声压分布可以用两个圆盘源的乘积来表示表达，矩形探头在介质中的声场为

$$\frac{-\mathrm{i}\omega u_1(x,y,z)}{v_0}=T\sum_{m=1}^{15}\sum_{n=1}^{15}\frac{A_n}{1+\mathrm{i}B_nD/x_r}\frac{A_m}{1+\mathrm{i}B_mD/x_r}\times\exp(\mathrm{i}k_1D+k_2z)\frac{\sqrt{\det G_2(0)}}{\sqrt{\det G_2(z)}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}k_1X^{\mathrm{T}}[G_2(z)]^{-1}X}{2}\right) \tag{2.4.35}$$

2.4.4　应用实例

图 2.15(a)为水浸探伤时，聚焦探头在钢中的声场分布，探头频率为 10MHz，晶片直径为 12.7mm，几何焦距为 39mm，水程为 20mm。可以看到，此时固体工件中的焦点距离入射点为 4.5mm。图 2.15(b)为当入射角小于临界角时发生的波形转换模拟，探头频率为 5MHz，直径为 12.7mm，水程为 100mm，入射角为 10°。可以看到，由于波形转换的作用，固体介质中同时存在横波和纵波，且其角度关系满足斯内尔定律。图 2.15(c)和 2.15(d)分布为声束穿过凸界面和凹界面的声场分布图，界面曲率半径为 100mm，探头频率为 5MHz，直径 12.7mm，水程 100mm，可以看到凸界面对声场有发射作用，而凹界面对声场有聚集作用。在缺陷定量过程中，需要考虑界面曲率对最终结果的影响。



(a) 聚集探头声场　(b) 界面处声场转换

(c) 凸界面透射声场　(d) 凹界面透射声场

图 2.15　MGB 计算得到的探头发射声场分布图

2.5 离散点源法

离散点源法(distributed point source method, DPSM)[21~23]是一种半解析法,它将需要计算的声场区域、界面及探头表面都看成是由点源组成,然后分别写成矩阵形式,利用位移和应力连续性条件,计算得到声场分布矩阵。

2.5.1 DPSM 的基本理论

对于如图 2.16 所示的水浸检测结构图,液固界面两边等距离离散成点源,探头表面也离散成点源。记探头点源为 A_s,界面两侧点源记为 A_1^* 和 A_1,目标点源(计算点)记为 T_1。

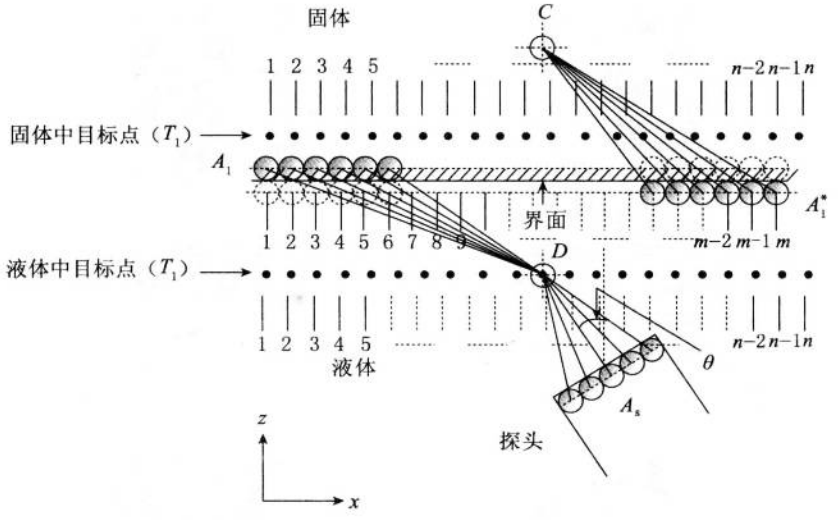


图 2.16 水浸检测探头界面离散示意图

液体介质中的质点速度和声压可以用一组计算点源的矩阵形式表示,由探头表面点源 A_s 在液体中产生的计算点的质点速度可以写为

$$V_s = M_{ss}A_s \tag{2.5.1}$$

式中,V_s 是一个 $N\times1$ 矩阵,表示离散在探头表面附近的 N 个计算点的速度分量;A_s 也是一个 $N\times1$ 矩阵,表示探头表面点源的强度。对于更一般的情况,计算点远离探头表面时,由探头点源引起的质点速度为

$$V_{T_1}^s = M_{(T_1)s}A_s \tag{2.5.2}$$

由界面 1 点源产生的质点速度为

$$V_{T_1}^1 = M_{(T_1)1}A_1 \tag{2.5.3}$$

如果界面上两侧分别离散成 M 个点源，则 A_1 为一个 $M\times 1$ 矩阵。类似地，由探头源产生的声压可以写为

$$P_{T_1}^{s} = Q_{(T_1)s}A_s \tag{2.5.4}$$

界面 1 点源产生的声压为

$$P_{T_1}^{1} = Q_{(T_1)1}A_1 \tag{2.5.5}$$

这样，计算点的总声压可以写为

$$P_{T_1} = P_{T_1}^{s} + P_{T_1}^{1} = Q_{(T_1)s}A_s + Q_{(T_1)1}A_1 \tag{2.5.6}$$

在界面处的计算点沿着 z 轴方向的位移场分量写为

$$u_{z_{T_1}} = \mathrm{DF}_{z_{(T_1)s}}A_s + \mathrm{DF}_{z_{(T_1)1}}A_1 \tag{2.5.7}$$

式中，$\mathrm{DF}_n(n=x,y,z)$ 的表达式为

$$\mathrm{DF}_n = \begin{bmatrix} g(R_{i1}^1,r_1^1) & g(R_{i1}^2,r_1^2) & g(R_{i1}^3,r_1^3) & \cdots & g(R_{i1}^{M-1},r_1^{M-1}) & g(R_{i1}^M,r_1^M) \\ g(R_{i2}^1,r_2^1) & g(R_{i2}^2,r_2^2) & g(R_{i2}^3,r_2^3) & \cdots & g(R_{i2}^{M-1},r_2^{M-1}) & g(R_{i2}^M,r_2^M) \\ g(R_{i3}^1,r_3^1) & g(R_{i3}^2,r_3^2) & g(R_{i3}^3,r_3^3) & \cdots & g(R_{i3}^{M-1},r_3^{M-1}) & g(R_{i3}^M,r_3^M) \\ g(R_{i4}^1,r_4^1) & g(R_{i4}^2,r_4^2) & g(R_{i4}^3,r_4^3) & \cdots & g(R_{i4}^{M-1},r_4^{M-1}) & g(R_{i4}^M,r_4^M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g(R_{iN}^1,r_N^1) & g(R_{iN}^2,r_N^2) & g(R_{iN}^3,r_N^3) & \cdots & g(R_{iN}^{M-1},r_N^{M-1}) & g(R_{iN}^M,r_N^M) \end{bmatrix} \tag{2.5.8}$$

其中，$i=x,y,z$

$$g(R_m^m,r_n^m) = \frac{1}{\rho\omega^2}\left\{\left[\frac{1}{r_n^m}\mathrm{i}kR_{2n}^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_n^m} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_n^m}}{(r_n^m)^2}R_{2n}^m\right]n_2 + \left[\frac{1}{r_n^m}\mathrm{i}kR_{1n}^m e^{\mathrm{i}kr_n^m} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_n^m}}{(r_n^m)^2}R_{1n}^m\right]n_1\right\} \tag{2.5.9}$$

用来计算透射到固体中的声场的矩阵 A_1^* 中的点源由三个相互垂直的点作用力构成。在固体中，三个球面体波由这三个点的作用力产生。A_1^* 界面处沿着 z 轴方向的垂直分量可以写成下面的表达式：

$$\sigma_{zz_{I1}} = S_{zz_{I1}}\cdot A_1^* \tag{2.5.10}$$

同样，剪切应力可以写为

$$\begin{aligned} \sigma_{xz_{I1}} &= S_{xz_{I1}}\cdot A_1^* \\ \sigma_{yz_{I1}} &= S_{yz_{I1}}\cdot A_1^* \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

式中，$S_{ij}(i,j=x,y,z)$ 的表达式为

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} s_{ij}^1 1 & s_{ij}^2 1 & s_{ij}^3 1 & s_{ij}^4 1 & s_{ij}^5 1 & \cdots & s_{ij}^{M-2} 1 & s_{ij}^{M-1} 1 & s_{ij}^M 1 \\ s_{ij}^1 2 & s_{ij}^2 2 & s_{ij}^3 2 & s_{ij}^4 2 & s_{ij}^5 2 & \cdots & s_{ij}^{M-2} 2 & s_{ij}^{M-1} 2 & s_{ij}^M 2 \\ s_{ij}^1 3 & s_{ij}^2 3 & s_{ij}^3 3 & s_{ij}^4 3 & s_{ij}^5 3 & \cdots & s_{ij}^{M-2} 3 & s_{ij}^{M-1} 3 & s_{ij}^M 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{ij}^1(N-2) & s_{ij}^2(N-2) & s_{ij}^3(N-2) & s_{ij}^4(N-2) & s_{ij}^5(N-2) & \cdots & s_{ij}^{(M-2)}(N-2) & s_{ij}^{(M-1)}(N-2) & s_{ij}^M(N-2) \\ s_{ij}^1(N-1) & s_{ij}^2(N-1) & s_{ij}^3(N-1) & s_{ij}^4(N-1) & s_{ij}^5(N-1) & \cdots & s_{ij}^{(M-2)}(N-1) & s_{ij}^{(M-1)}(N-1) & s_{ij}^M(N-1) \\ s_{ij}^1 N & s_{ij}^2 N & s_{ij}^3 N & s_{ij}^4 N & s_{ij}^5 N & \cdots & s_{ij}^{M-2} N & s_{ij}^{M-1} N & s_{ij}^M N \end{bmatrix} \tag{2.5.12}$$

同样，液体中沿着 z 方向的位移场可以写为

$$u_{z_{l1}} = \mathrm{DF}_{z_{1s}} A_s + \mathrm{DF}_{z_{11}} A_1 \tag{2.5.13}$$

液固界面处的位移场写为

$$u_{z_{l1}} = \mathrm{DF}_{z_{l1}} \cdot \mathrm{A}_1^* \tag{2.5.14}$$

利用应力位移连续性边界条件可以得到一个矩阵方程

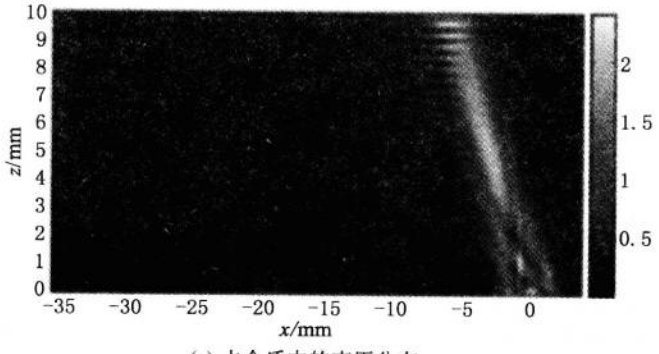
$$[K][A] = [V] \tag{2.5.15}$$

式中，A 为强度矢量；K 为应变矩阵；V 为应力矢量。则计算点的强度矢量矩阵可以通过解线性方程组求得

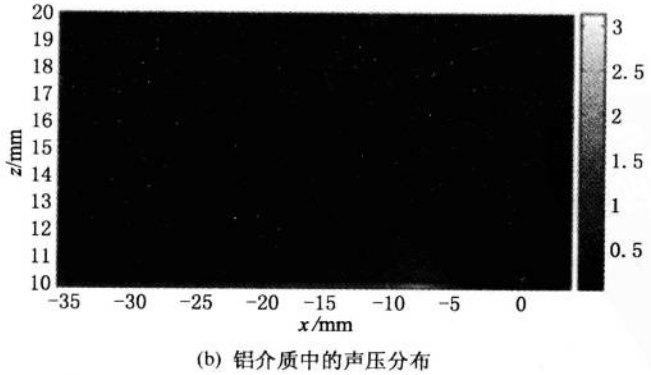
$$[A] = [K]^{-1}[V] \tag{2.5.16}$$

2.5.2 应用实例

在利用 DPSM 进行计算时，一个重要的问题是确定每个位置的离散点数目及相邻离散点之间的距离。DPSM 具有收敛性，当相邻离散点之间的间距小于半个波长时，计算结果将不会随着间距的变化而变化。图 2.17 为利用 DPSM 模拟的



(a) 水介质中的声压分布



(b) 铝介质中的声压分布

图 2.17 探头发射声场(临界角入射)

探头发射声场以临界角入射到水铝界面时的铝中的应力分布和水中的声压分布，其中探头直径为 4mm，频率为 2.2MHz，液固界面用 89 个点离散，相邻离散点之间的间距取 λ/π，λ 为波长。根据斯内尔定律，计算临界角为 30.4°。由图 2.17(a) 可以看到，在界面上出现表面瑞利波。

图 2.18 是利用 DPSM 计算得到的斜探头的入射声场。探头频率为 2.25MHz，直径为 6.35mm，入射角为 15.4°。固体介质为铝，利用 350 个离散点模拟探头，在界面两侧分别用 105 个点模拟界面。从图中可以看到，出现纵波、横波及表面波。



(a) 水介质中的声压分布　　(b) 铝介质中的声压分布

图 2.18　斜探头的入射声场

2.6　弹性动力学有限积分法

弹性动力学有限积分法（elastodynamic finite intergration technique，EFIT）[24~29]基本思想是将介质离散成交错的网格，计算每个单元的体积和表面积分以及应力速度关系式，并假设每个单元格的六个表面的应力应变完全一样。这在数学上表示为将有限积分技术(FIT)应用到离散的麦克斯韦方程组，得到 EFIT 应力单元格表达式。相比于其他计算方法，EFIT 在计算非均质材料上有明显的优越性。然而，非均质材料，特别是缺陷处的网格划分必须要保证各个网格的应力应变是连续的，交错网格的划分必须满足 EFIT 方法的稳定性和收敛条件。这在一定程度上限制了 EFIT 的应用。

2.6.1　EFIT 一般公式

定义时间为 t，观察点矢量为 r，运动方程中的质点速度为 $v(r,t)$，应变矢量为 $S(r,t)$，力学方程中的动量密度为 $p(r,t)$，应力矢量为 $\sigma(r,t)$，总动力矢量为 $\iiint_V p(r,t)\mathrm{d}V$，总表面牵引力矢量为 $\iint_S n\cdot\sigma(r,t)\,\mathrm{d}S$，体积变形二级张量为

$\iiint_V S(r,t)\mathrm{d}V$，偏通量二级张量为$\iint_S n \cdot v(r,t)\mathrm{d}S$。

根据线性动量的牛顿定律可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V p(r,t)\mathrm{d}V = \iint_S n \cdot \sigma(r,t)\mathrm{d}S \tag{2.6.1}$$

根据变形定律，由偏通量导致的体积变形量与时间的关系式如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V S(r,t)\mathrm{d}V = \iint_S \frac{1}{2}[nv(r,t) + v(r,t)n]\mathrm{d}S \tag{2.6.2}$$

从式(2.6.2)可以看到，反对称偏通量只是引起体积变形，与时间变化无关。式(2.6.1)和式(2.6.2)可以看做是弹性动力学中的麦克斯韦方程的积分形式。在电磁学中，除真空外，其他媒质都需要用连续性条件来求解麦克斯韦方程组。这同样适用于线弹性动力学，由质量密度矢量$\rho(r)$，得到p和v关系：

$$p(r,t) = \rho(r) \cdot v(r,t) \tag{2.6.3}$$

同样，由四级顺度矢量S，得到应力应变关系：

$$S(r,t) = S(r) : \sigma(r,t) \tag{2.6.4}$$

方程(2.6.4)的反演为

$$\sigma(r,t) = C(r) : S(r,t) \tag{2.6.5}$$

这样就定义了胡克定律中的劲度矢量$C(r)$。为了模拟弹性波的传播，需要知道材料的参数$\rho(r)$、$C(r)$、$S(r)$。将弹性动力学的连续性方程带入运动方程(2.6.1)和方程(2.6.2)，忽略体积随着时间变化的高阶作用得到

$$\iiint_V \rho(r) \cdot \dot{v}(r,t)\mathrm{d}V = \iint_S n \cdot \sigma(r,t)\mathrm{d}S \tag{2.6.6}$$

$$\iiint_V S(r) : \dot{\sigma}(r,t)\mathrm{d}V = \iint_S \frac{1}{2}[nv(r,t) + v(r,t)n]\mathrm{d}S \tag{2.6.7}$$

方程(2.6.6)为柯西运动方程，方程(2.6.7)为变形速率方程，其中上标“·”表示一阶时间偏导。这两个方程常用于计算各向异性非均质材料的声场传播。

2.6.2 非均质介质的网格离散

将非均质各向同性介质划分成如图 2.19 所示的交错网格，假设每个离散单元的振动速度v和应力σ不变，速度v的网格与应力σ的网格呈交错形式。已知v的三个分量v_1、v_2、v_3，σ的主对角和非对角分量σ_{11}、σ_{22}、σ_{33}、σ_{12}、σ_{13}、σ_{23}，利用方程(2.6.8)和方程(2.6.9)可以得到介质单元的体积和表面积积分式。在利用网格单元进行步进求解时，先用速度v网格周围的应力分量计算该网格的速度分量，然后再用得到的速度分量计算下一个应力网格的应力分量，这样交错进行计算，最终得到所有位置的速度和应力，相应的离散方程组为

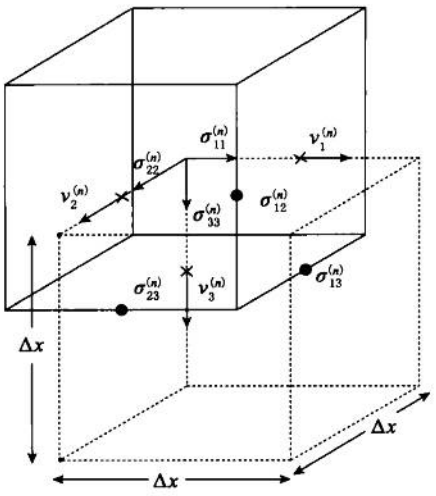


图 2.19 EFIT 交错网格单元示意图

$$\dot{v}_1^{(n)}(t)=\frac{1}{\Delta x}\frac{2}{\rho_0^{(n)}+\rho_0^{(n+M_1)}}\times\left[\sigma_{11}^{(n+M_1)}(t)-\sigma_{11}^{(n)}(t)+\sigma_{12}^{(n)}(t)-\sigma_{12}^{(n-M_2)}(t)+\sigma_{13}^{(n)}(t)-\sigma_{13}^{(n-M_3)}(t)\right] \tag{2.6.8}$$

$$\dot{v}_2^{(n)}(t)=\frac{1}{\Delta x}\frac{2}{\rho_0^{(n)}+\rho_0^{(n+M_2)}}\times\left[\sigma_{12}^{(n)}(t)-\sigma_{12}^{(n-M_1)}(t)+\sigma_{22}^{(n+M_2)}(t)-\sigma_{22}^{(n)}(t)+\sigma_{23}^{(n)}(t)-\sigma_{23}^{(n-M_3)}(t)\right] \tag{2.6.9}$$

$$\dot{v}_3^{(n)}(t)=\frac{1}{\Delta x}\frac{2}{\rho_0^{(n)}+\rho_0^{(n+M_3)}}\times\left[\sigma_{13}^{(n)}(t)-\sigma_{13}^{(n-M_1)}(t)+\sigma_{23}^{(n)}(t)-\sigma_{23}^{(n-M_2)}(t)+\sigma_{33}^{(n+M_3)}(t)-\sigma_{33}^{(n)}(t)\right] \tag{2.6.10}$$

$$\dot{\sigma}_{11}^{(n)}(t)=\frac{1}{\Delta x}\{(\lambda^{(n)}+2\mu^{(n)})\left[v_1^{(n)}(t)-v_1^{(n-M_1)}(t)\right]+\lambda^{(n)}\left[v_2^{(n)}(t)-v_2^{(n-M_2)}(t)+v_3^{(n)}(t)-v_3^{(n-M_3)}(t)\right]\} \tag{2.6.11}$$

$$\dot{\sigma}_{22}^{(n)}(t)=\frac{1}{\Delta x}\{(\lambda^{(n)}+2\mu^{(n)})\left[v_2^{(n)}(t)-v_2^{(n-M_2)}(t)\right]+\lambda^{(n)}\left[v_1^{(n)}(t)-v_1^{(n-M_1)}(t)+v_3^{(n)}(t)-v_3^{(n-M_3)}(t)\right]\} \tag{2.6.12}$$

$$\dot{\sigma}_{33}^{(n)}(t)=\frac{1}{\Delta x}\{(\lambda^{(n)}+2\mu^{(n)})[v_3^{(n)}(t)-v_3^{(n-M_3)}(t)]$$
$$+\lambda^{(n)}[v_1^{(n)}(t)-v_1^{(n-M_1)}(t)+v_3^{(n)}(t)-v_3^{(n-M_3)}(t)]\} \quad (2.6.13)$$

$$\dot{\sigma}_{12}^{(n)}(t)=\frac{1}{\Delta x}\frac{4}{\frac{1}{\mu^{(n)}}+\frac{1}{\mu^{(n+M_1)}}+\frac{1}{\mu^{(n+M_2)}}+\frac{1}{\mu^{(n+M_1+M_2)}}}$$
$$\times[v_1^{(n+M_2)}(t)-v_1^{(n)}(t)+v_2^{(n+M_1)}(t)-v_2^{(n)}(t)] \quad (2.6.14)$$

$$\dot{\sigma}_{13}^{(n)}(t)=\frac{1}{\Delta x}\frac{4}{\frac{1}{\mu^{(n)}}+\frac{1}{\mu^{(n+M_1)}}+\frac{1}{\mu^{(n+M_3)}}+\frac{1}{\mu^{(n+M_1+M_3)}}}$$
$$\times[v_1^{(n+M_3)}(t)-v_1^{(n)}(t)+v_3^{(n+M_1)}(t)-v_3^{(n)}(t)] \quad (2.6.15)$$

$$\dot{\sigma}_{23}^{(n)}(t)=\frac{1}{\Delta x}\frac{4}{\frac{1}{\mu^{(n)}}+\frac{1}{\mu^{(n+M_2)}}+\frac{1}{\mu^{(n+M_3)}}+\frac{1}{\mu^{(n+M_2+M_3)}}}$$
$$\times[v_2^{(n+M_3)}(t)-v_2^{(n)}(t)+v_3^{(n+M_2)}(t)-v_3^{(n)}(t)] \quad (2.6.16)$$

方程(2.6.8)～方程(2.6.10)的时间导数用中心差分得到

$$v_i^{(z)}=v_i^{(z-1)}+\dot{v}_i^{(z-1/2)}\Delta t \quad (2.6.17)$$

$$\sigma_{ij}^{(z+1/2)}=\sigma_{ij}^{(z-1/2)}+\dot{\sigma}_{ij}^{(z)}\Delta t \quad (2.6.18)$$

2.6.3 应用实例

图 2.20 是利用 EFIT 计算得到的点源垂直入射到多层介质中的声场传播图，第一层是厚度为 10mm 的有机玻璃，基体为钢，两者之间夹着一层厚度为 200μm 的铅层。

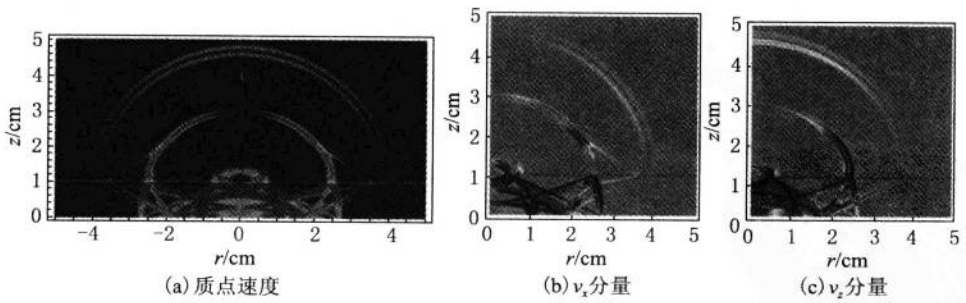


图 2.20 点源垂直入射到多层介质中的声场传播图

利用 EFIT 模拟声场在如图 2.21 所示的结构中的传播。左右边界为开放边界，上下边界满足自由应力条件。不同时刻得到的瞬态传播图如图 2.22 所示，可以观察声束在曲界面底面上的反射作用。

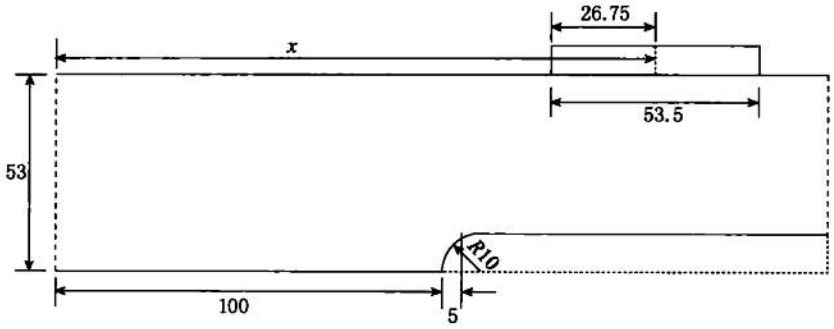
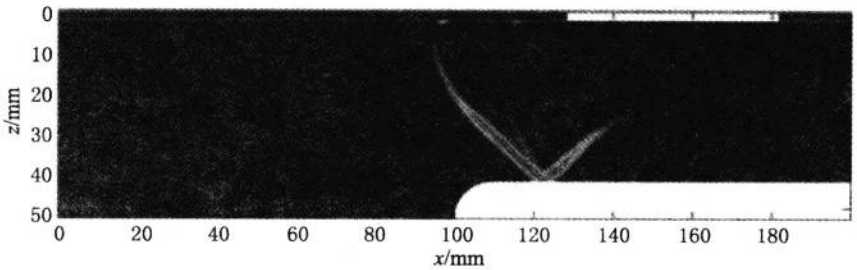
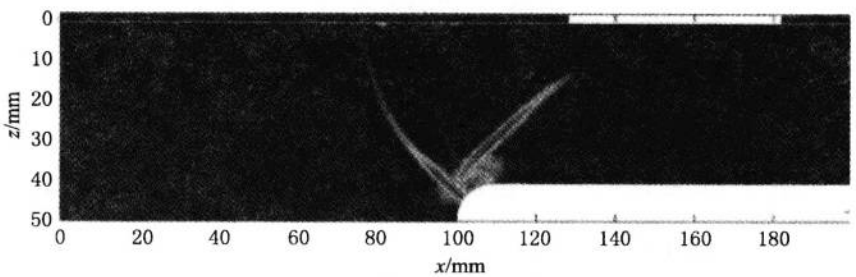


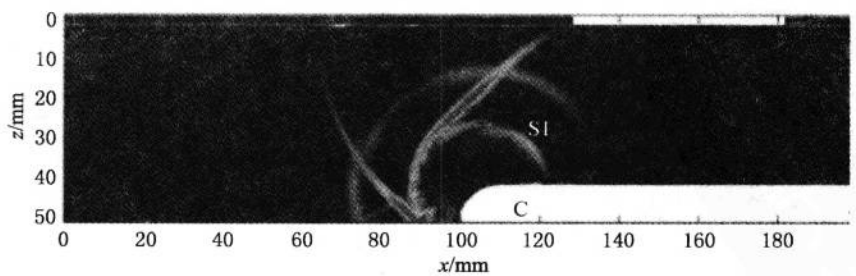
图 2.21　被检工件几何结构示意图(单位:mm)



(a) $t=2.282\times10^{-5}$s



(b) $t=3.221\times10^{-5}$s



(c) $t=2.819\times10^{-5}$s

图 2.22　声场瞬态传播图

2.7 有限差分法

利用有限差分法(finite difference method, FDM)[6, 30~32]进行超声检测数值计算的过程为:首先将传播介质划分成交错的网格,将探头激励以位移或者应力载荷形式施加到相应单元节点,将波动方程写成差分形式,利用差分表达式计算所需时刻的声场瞬态传播图。

2.7.1 差分格式

差分方程可以看做是原始方程按泰勒级数展开的有限项近似。这必然会导致数值误差,因此必须选择合适的参数来保证每个计算点的稳定性。

根据泰勒级数不同近似的截取方式,差分格式可以分为三种格式:

(1) Lax-Friedriches 格式。显式,在空间上取三个离散点,在$|a\Delta t/\Delta x|\leqslant 1$时稳定

$$\frac{p_k^{n+1}-(p_{k+1}^n+p_{k-1}^n)/2}{\Delta t}+\frac{a}{\Delta x}\frac{p_{k+1}^n-p_{k-1}^n}{2}=0 \tag{2.7.1}$$

(2) Leap-Frog 格式。显式,在时间上取三层,在$|a\Delta t/\Delta x|\leqslant 1$时稳定

$$\frac{p_k^{n+1}-p_k^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{a}{\Delta x}\frac{p_{k+1}^n-p_{k-1}^n}{2}=0 \tag{2.7.2}$$

(3) Crank-Nicholson 格式。隐式,在空间上取三点,时间上也取三点

$$\frac{p_k^{n+1}-p_k^{n-1}}{\Delta t}+\frac{a}{2\Delta x}\left(\frac{p_{k+1}^{n+1}-p_{k-1}^{n+1}}{2}+\frac{p_{k+1}^n-p_{k-1}^n}{2}\right)=0 \tag{2.7.3}$$

式中,a 为原方程系数;Δt 为时间步长;Δx 为空间步长;p 为所求目标值。

2.7.2 固体声场方程的差分展开

对于弹性介质,常用运动方程、应力应变方程和连续性方程描述弹性波传播。在弹性介质中,应力应变方程为

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}u_{k,l} \tag{2.7.4}$$

式(2.7.4)是用爱因斯坦求和约定表示。其中 C_{ijkl} 是一个 6×6 的矩阵,包含 36 个弹性参数。对于各向异性,弹性参数减少到 2 个,即拉梅常数 λ 和 μ。将式(2.7.4)转换为时域形式:

$$\dot{\sigma}_{ij}=C_{ijkl}v_{k,l} \tag{2.7.5}$$

式中,v 是基于牛顿定理得到的速度

$$\rho\dot{v}_i=\sigma_{ij,j} \tag{2.7.6}$$

由式(2.7.6)可以导出一个微分方程组。对于二维的情况,方程组如下:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \tag{2.7.7}$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \tag{2.7.8}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{2.7.9}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{2.7.10}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \tag{2.7.11}$$

差分离散依照如图 2.23 所示的交错网格进行，正应力标记为 σ_{xx}、σ_{zz}，位于网格节点位置，速度分量 v_x、v_z 及剪切应力 σ_{xz} 位于网格内部，相隔半个步长。展开格式选择 Leap-Frog 格式。

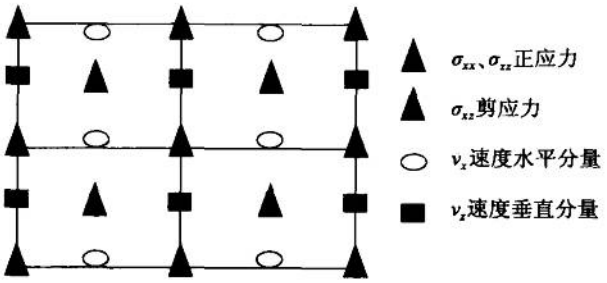


图 2.23　有限差分网格和变量位置示意图

网格上的速度分量和应力分量处在不同的时间和位置，相互之间错开 $\Delta t/2$、$\Delta x/2$ 和 $\Delta y/2$。首先在时间网格的前 $\Delta t/2$ 时刻计算速度分量，用得到的速度分量来计算 Δt 时刻的应力分量；然后在时间网格后 $\Delta t/2$ 时刻，利用得到的应力分量计算 $\Delta t + \Delta t/2$ 时刻的速度分量，依次交错进行，结合式(2.7.4)，可以得到 u、v 差分表达式如下：

$$\rho \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k-1}}{\Delta t} = \frac{(\sigma_{xx})_{i+1,j}^{k} - (\sigma_{xx})_{i-1,j}^{k}}{\Delta x} + \frac{(\sigma_{xz})_{i,j+1}^{k} - (\sigma_{xz})_{i,j-1}^{k}}{\Delta z} \tag{2.7.12}$$

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^{k-1} + \frac{(\sigma_{xx})_{i+1,j}^{k} - (\sigma_{xx})_{i-1,j}^{k}}{\rho \Delta x / \Delta t} + \frac{(\sigma_{xz})_{i,j+1}^{k} - (\sigma_{xz})_{i,j-1}^{k}}{\rho \Delta z / \Delta t} \tag{2.7.13}$$

$$\rho \frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^{k-1}}{\Delta t} = \frac{(\sigma_{xx})_{i+1,j}^{k} - (\sigma_{xx})_{i-1,j}^{k}}{\Delta x} + \frac{(\sigma_{yy})_{i,j+1}^{k} - (\sigma_{yy})_{i,j-1}^{k}}{\Delta z} \tag{2.7.14}$$

$$v_{i,j}^{k+1} = v_{i,j}^{k-1} + \frac{(\sigma_{xx})_{i+1,j}^{k} - (\sigma_{xx})_{i-1,j}^{k}}{\rho \Delta x / \Delta t} + \frac{(\sigma_{yy})_{i,j+1}^{k} - (\sigma_{yy})_{i,j-1}^{k}}{\rho \Delta z / \Delta t} \tag{2.7.15}$$

应力分量写为

$$\frac{(\sigma_{xx})_{i,j}^{k+1}-(\sigma_{xx})_{i,j}^{k-1}}{\Delta t}=\frac{(\lambda+2\mu)(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})}{\Delta x}+\frac{\mu(v_{i,j+1}-v_{i,j-1})}{\Delta z} \tag{2.7.16}$$

$$(\sigma_{xx})_{i,j}^{k+1}=(\sigma_{xx})_{i,j}^{k-1}+\frac{(\lambda+2\mu)(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})}{\Delta x/\Delta t}+\frac{\mu(v_{i,j+1}-v_{i,j-1})}{\Delta z/\Delta t} \tag{2.7.17}$$

$$\frac{(\sigma_{zz})_{i,j}^{k+1}-(\sigma_{zz})_{i,j}^{k-1}}{\Delta t}=\frac{(\lambda+2\mu)(v_{i+1,j}-v_{i-1,j})}{\Delta x}+\frac{\lambda(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})}{\Delta z} \tag{2.7.18}$$

$$(\sigma_{zz})_{i,j}^{k+1}=(\sigma_{zz})_{i,j}^{k-1}+\frac{(\lambda+2\mu)(v_{i+1,j}-v_{i-1,j})}{\Delta x/\Delta t}+\frac{\lambda(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})}{\Delta z/\Delta t} \tag{2.7.19}$$

$$\frac{(\sigma_{xz})_{i,j}^{k+1}-(\sigma_{xz})_{i,j}^{k-1}}{\Delta t}=\frac{\lambda(v_{i+1,j}-v_{i-1,j})}{\Delta x}+\frac{\lambda(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})}{\Delta z} \tag{2.7.20}$$

$$(\sigma_{xz})_{i,j}^{k+1}=(\sigma_{xz})_{i,j}^{k-1}+\frac{\lambda(v_{i+1,j}-v_{i-1,j})}{\Delta x/\Delta t}+\frac{\lambda(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})}{\Delta z/\Delta t} \tag{2.7.21}$$

对于 $n=c\Delta t/\Delta x$(c 为声速),为了保证有限差分法的数值收敛,n 必须小于等于 1。

施加适合的边界条件是保证计算结果准确的重要因素。一般边缘处,如工件底面,可以令 $v=0$。为了减少计算量,可以施加人工自由边界,并设置吸收边界条件来消除人工边界引起的反射波。

2.7.3 应用实例

利用有限差分法计算相控阵探头在钢板中的声场传播过程,网格单元如图 2.24 所示,计算结果如图 2.25 所示。检测参数为:探头中心频率 5MHz,长度 46mm,宽度 15mm,波形为纵波,检测角度为 45°,网格离散尺寸为 8.4×10^{-2}mm ($\lambda/15$),时间步长为 9.43×10^{-9}s。工件材质为钢,纵波声速为 5900m/s,横波波速为 3230m/s,密度为 7900kg/m^3。相控阵晶片的载荷施加是通过对不同离散单元节点以不同的延迟时间施加垂直应力实现的。

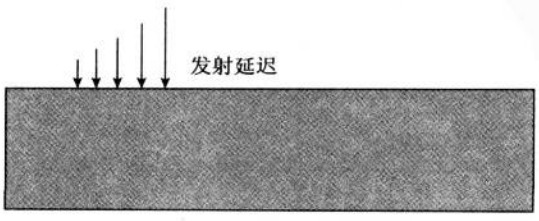
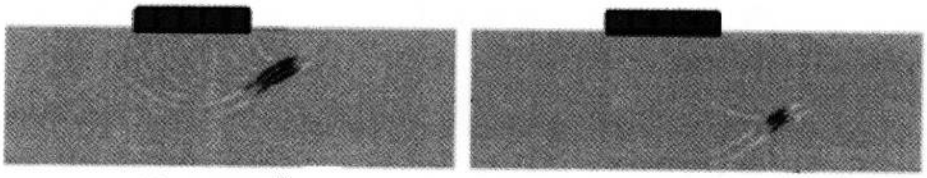


图 2.24 有限差分网格划分示意图



(a) t=1.76×10^{-6}s　　(b) t=2.65×10^{-6}s

图 2.25　相控阵探头发射声场瞬态图

2.8　有限元法

利用有限元法(finite element method, FEM)[33~36]进行超声检测数值计算过程可以分为以下几个步骤:① 介质的离散,根据计算精度和速度的要求,将介质划分成一定数目和形状的网格单元;② 选择位移插值函数,并用节点位移来表示单元内任一点的位移、应变和应力;③ 单元分析,利用最小势能原理或虚功原理建立单元的有限元方程;④ 计算等效节点载荷阵列,将探头激励以位移或者应力载荷形式施加到相应单元节点;⑤ 整体分析,将单元刚度矩阵组装成整体刚度矩阵,形成有限元基本方程;⑥ 边界条件,为消除刚度矩阵的奇异性,引入位移边界条件,使得基本方程可解;⑦ 求解结构平衡方程,得到未知节点位移,求解方法主要分为直接法和迭代法两种;⑧ 求解单元应力或节点应力。

2.8.1　有限元方程与求解

各向同性固体中的声场基本方程为

$$(\lambda+2\mu)\nabla\nabla u-\mu\nabla\times\nabla\times u=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.8.1}$$

式中,λ、μ 为拉梅常数;u 表示质点位移。

依据有限元计算标准步骤,首先将计算区域划分为若干单元和节点,然后构造位移插值函数,并用节点位移和位移插值函数表示求解区域中任意一点的位移,然后利用伽辽金法,结合节点位移变分任意性,由方程(2.8.1)可以导出系统的运动方程:

$$M\ddot{a}(t)+C\dot{a}(t)+Ka(t)=Q(t) \tag{2.8.2}$$

式中,$\ddot{a}(t)$和$\dot{a}(t)$分别是系统的节点加速度向量和节点速度向量;M、C、K 和$Q(t)$分别是系统的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和节点荷载向量,分别由各自的单元矩阵和向量集成

$$M=\sum_e M^e,\quad C=\sum_e C^e,\quad K=\sum_e K^e,\quad Q=\sum_e Q^e \tag{2.8.3}$$

式中，$M^e=\int_{V_e}\rho N^{\mathrm{T}}N\mathrm{d}V$，$K^e=\int B^{\mathrm{T}}DB\mathrm{d}V$，$C^e=\int\mu N^{\mathrm{T}}N\mathrm{d}V$ 分别是单元的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵。

$$Q^e=\int_{V_e}N^{\mathrm{T}}f\mathrm{d}V+\int_{S_\sigma^e}N^{\mathrm{T}}\mathrm{d}S \tag{2.8.4}$$

如果忽略阻尼的影响，则运动方程简化为

$$M\ddot{a}(t)+Ka(t)=Q(t) \tag{2.8.5}$$

如果式(2.8.5)的右端项为零，则其为系统的自由振动方程。

目前求解运动方程方法有直接积分法和振动叠加法两类，直接积分法又包括中心差分法和 Newmark 积分法，其中 Newmark 积分法是著名有限元分析软件 ANSYS 求解动力学问题的方法，利用 Newmark 方法求解运动方程的算法如下：

1. 初始计算

(1) 形成刚度矩阵 K、质量矩阵 M 和阻尼矩阵 C

(2) 给定 a_0、$\dot{a}_0$ 和 $\ddot{a}_0$

(3) 选择时间步长 Δt，参数 α 和 δ，并计算积分常数

$\delta\geqslant 0.50$，　$\alpha\geqslant 0.25(0.5+\delta)^2$

$$c_0=\frac{1}{\alpha\Delta t^2},\quad c_1=\frac{\delta}{\alpha\Delta t},\quad c_2=\frac{1}{\alpha\Delta t},\quad c_3=\frac{1}{2\alpha}-1$$

$$c_4=\frac{\delta}{\alpha}-1,\quad c_5=\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha}-2\right),\quad c_6=\Delta t(1-\delta),\quad c_7=\delta\Delta t$$

(4) 形成有效刚度矩阵元：$\hat{K}=K+c_0M+c_1C$

(5) 三角分解元：$\hat{K}=LDL^{\mathrm{T}}$

2. 对于每一时间步长

(1) 计算式时间 $t+\Delta t$ 的有效荷载

$$\hat{Q}_{t+\Delta t}=Q_{t+\Delta t}+M(c_0a_t+c_2\dot{a}_t+c_3\ddot{a}_t)+C(c_1a_t+c_4\dot{a}_t+c_5\ddot{a}_t)$$

(2) 求解时间 $t+\Delta t$ 的位移

$$LDL^{\mathrm{T}}a_{t+\Delta t}=\hat{Q}_{t+\Delta t}$$

(3) 计算时间 $t+\Delta t$ 的加速度和速度

$$\ddot{a}_{t+\Delta t}=c_0(a_{t+\Delta t}-a_t)-c_2\dot{a}_1-c_3\ddot{a}_t$$

$$\dot{a}_{t+\Delta t}=\dot{a}_t+c_6\ddot{a}_t+c_7\ddot{a}_{t+\Delta t}$$

当 $\delta\geqslant 0.5$，$\alpha\geqslant 0.25(0.5+\delta)^2$ 时，Newmark 方法是无条件稳定的，即时间步长 Δt 的大小不影响解的稳定性。此时，Δt 的选取主要根据解的精度确定。从式(2.8.6)或式(2.8.9)解得结点的位移向量 $a(t)$，即可计算所需要的应变 $\varepsilon(t)$ 和应力 $\sigma(t)$。

2.8.2　应用实例

图 2.26 为利用有限元法计算得到声场瞬态传播图，计算参数为：探头频率 5MHz，长度 15mm，波形为纵波，网格尺寸为 0.1mm(λ/12)，网格划分后总节点数为 124326，总单元数为 123402。单元类型为四节点二维平面单元(Plane42)，网格划分方式为映射，材料杨氏模量为 70.3GPa，密度为 2730kg/m³。工件四周设定为自由边界。从图中可以看到，尽管入射波形为纵波，但是在介质中依然存在较弱的横波和表面波。

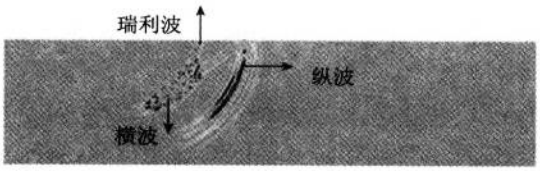


图 2.26　探头发射声场瞬态传播图

参 考 文 献

[1] Morse P M, Methods of Theoretical Physics, Part I[M]. New York: McGraw-Hill, 1953.

[2] Rose J L. Ultrasonic Waves in Solid Media[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[3] Schmerr L. Ultrasonic Nondestructive Evaluation Systems Models and Measurements[M]. Berlin: Springer, 2007.

[4] Belgroune D. A theoretical study of ultrasonic wave transmission through a fluid-solid interface[J]. Ultraonics, 2008, 48(3): 220-230.

[5] Belgroune D. Modelling of the ultrasonic field by the angular spectrum method in presence of interface[J]. Ultrasonics, 2002, 40(1-8): 297-302.

[6] 李太宝. 计算声学[M]. 南京：南京大学出版社，2003.

[7] Deschamps G A. Ray techniques in electromagnetics[J]. Proceedings of the IEEE, 1972, 60(9): 1022-1035.

[8] Gengembre N. Pencil method in elastodynamics: Application to ultrasonic field computation[J]. Ultrasonics, 2000, 38(1-8): 495-499.

[9] Gengembre N. Modelisation du champ ultrasonore rayonne dans un solide anisotrope et heterogene par un traducteur immerge[D]. These de doctorat de l'universite Paris VII, 1999.

[10] Lhemery A. Modeling tools for ultrasonic inspection of welds[J]. NDT&E International, 2000, 33(7): 499-513.

[11] Mephane M. Modelisation du controle ultrasonore de tubes d'acier presentant des defauts de type "Entaille longitudinale"[D]. These de doctorat de l'universite Paris VII,1998.

[12] Azar L. Beam focusing behavior of linear phased arrays[J]. NDT&E International, 2000, 33(3) :189-198.

[13] 丁辉等. 超声检测计算模型的建立与仿真软件的开发[J]. 无损检测,2009, 31(8):614-618 .

[14] 张俊等. 核电站关键部件超声检测计算分析系统开发[J]. 核动力工程, 2009,30(6): 112-116.

[15] Zhang J. Comparison of modeling and simulation approaches to phased Array ultrasonic testing[C]. Proceedings of the Second International Conference on Modelling and Simulation, 2009, 5 : 358-362.

[16] 于连洋. 基于多元高斯声束模型的超声检测声场模拟[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2006.

[17] Wen J J. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams[J]. Journal of acoustic Society of American,1988,85(3):1752-1756.

[18] Sha K. A Complex virtual source approach for calculating the diffraction beam field generated by a rectangular planar source[J]. IEEE Transaction on Ultrasonics, Fcrroelectrics, and Frequency Control, 2003, 50(7):890-897.

[19] Spies M. Modeling of transducer fields in inhomogeneous anisotropic materials using Gaussian beam superposition[J]. NDT&E International, 2000,33 (3): 155-162.

[20] Huang R J. Modeling the radiation of ultrasonic phased-array transducers with Gaussian beams[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2008,55(12): 2692-2702.

[21] Alnuaimi N A. Modeling Ultrasonic Transducer in Homogeneous and Non-homogeneous Media Using DPSM Method[D]. Tucson: University of Arizona, 2004.

[22] Banerjee S. Semi-analytical modeling of ultrasonic fields in solids with internal anomalies immersed in a fluid[J]. Wave Motion, 2008,45 (5): 581-595.

[23] Banerjee S. DPSM technique for ultrasonic field modelling near fluid-solid interface[J]. Ultrasonics, 2007, 46 (3):235-250.

[24] Fellinger P, Marklein R. Numerical modeling of elastic wave propagation and scattering with EFIT-elastodynamic finite integration technique[J]. Wave Motion, 1995, 21(1): 47-66.

[25] Schubert F. Numerical computation of ultrasonic wave propagation in concrete usiny the elastodynamic finite integration technique (EFIT) [C]. IEEE Ultrasonics Symposium, 2002,1:799-804.

[26] Langenberg K J, Hannemann R. Application of modeling techniques for ultrasonic austenitic weld inspection[J]. NDT&E International, 2000,33(7):465-480.

[27] Langenberg K J, Marklein R. Transient elastic waves applied to nondestructive testing of

transversely isotropic lossless materials: A coordinate-free approach[J]. Wave Motion, 2005,41(3):247-261.

[28] Marklein R. Numerical modelling of ultrasonic NDT of a wheel shaft of an ICE train[J]. ECNDT, 2006:1-8.

[29] Schubert F. 3-D ultrasonic transducer modeling using the elastodynamic finite integration technique in combination with point-source-synthesis[C]. IVth International workshop of NDT Experts,2007:1-10.

[30] Kazys R , Mazeika L. 3D Analysis of interaction of lamb waves with defects in loaded steel plates[J]. Ultrasonics,2006,44(1):1127-1130.

[31] Satyanarayan L, Sridhar C. Simulation of ultrasonic phased array technique for imaging and sizing of defects using longitudinal waves[J]. Pressure Vessels and Piping, 2007, 84 (12): 716-729.

[32] Masserey B , Aebi L. Ultrasonic surface crack characterization on complex geometries usingsurface waves[J]. Ultrasonics,2006,44(1):957-961.

[33] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社. 2003.

[34] 王德国. 弹性全空间圆形孔洞对 P 波的散射[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学, 2005.

[35] Baskaran G. Simulation of the TOFD technique using the finite element method[J]. Insight, 2007,49(11):641-646.

[36] Yang P S, Liu S W. Transient response of SH waves in a layered half-space with subsurface and interface cracks[J]. Applied Mathematical Modelling,2008,32(4),595-609.

第 3 章　各向异性介质中超声波的传播

超声波在各向同性介质中传播时相速度与群速度在各个方向均一致，而超声波在各向异性介质中的相速度与群速度仅在某些特定方向上一致，在其他方向上大小和方向可能均有差别，这导致了超声声束在各向异性介质中发生偏转，且超声波的相速度与群速度都与方向有关。

3.1　各向异性介质

材料的劲度系数是表征材料弹性性质的特征值，各向同性和各向异性介质可以用不同的劲度系数矩阵来描述[1,2]。劲度系数矩阵与固体晶系有关，七种不同晶系的劲度系数矩阵各自含有不同数目的劲度系数常数，以下分别列出各晶系的劲度系数矩阵。

三斜晶系含有 21 个常数

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix}$$

单斜晶系含有 13 个常数

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{46} & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

正交晶系含有 9 个常数

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

立方晶系含有 3 个常数

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}$$

六角晶系含有 5 个常数

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{(C_{11}-C_{12})}{2} \end{bmatrix}$$

四方晶系有两种，分别含有 7 个常数和 6 个常数

7 常数

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & -C_{16} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ C_{16} & -C_{16} & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

6 常数

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

三角晶系也有两种，分别含有 7 个常数和 6 个常数

7 常数

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & -C_{25} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & C_{25} & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & C_{25} \\ -C_{25} & C_{25} & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & C_{25} & C_{14} & \dfrac{(C_{11}-C_{12})}{2} \end{bmatrix}$$

6 常数

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & C_0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{14} & \dfrac{(C_{11}-C_{12})}{2} \end{bmatrix}$$

表 3.1 列出了几种常用金属的劲度系数，其中铁是指铁磁晶体和亚铁磁晶体。根据劲度系数矩阵可以计算出各种材料的慢度。

表 3.1 常见金属的劲度系数

材料		晶系	劲度/(10^{10}N/m^2)				
			C_{11}	C_{33}	C_{44}	C_{12}	C_{13}
铝	单晶	立方	10.80		2.85	6.13	
	多晶		11.1		2.5		
金	单晶	立方	18.6		4.2	15.7	
	多晶		20.7		2.85		
铁	单晶	立方	23.7		11.6	14.1	
	多晶		27.7		8.2		
镍	单晶	立方	25.0		11.85	16.0	
	多晶		32.4		8.0		
银	单晶	立方	11.9		4.37	8.94	
	多晶		13.95		2.7		
钛	单晶	六角	16.2	18.1	4.67	9.2	6.9
	多晶		16.59		4.4		
钨	单晶	立方	50.2		15.2	19.9	
	多晶		58.1		13.4		

通过求解各晶系的克里斯托弗尔方程可以得到相应的慢度值，对应三斜晶系的克里斯托弗方程为

$$\begin{vmatrix} \alpha k^2-\rho\omega^2 & \delta k^2 & \varepsilon k^2 \\ \delta k^2 & \beta k^2-\rho\omega^2 & \xi k^2 \\ \varepsilon k^2 & \xi k^2 & \gamma k^2-\rho\omega^2 \end{vmatrix}=0 \tag{3.1.1}$$

式中，α、β、γ、δ、ε、ξ 在不同晶系材料中不尽相同，以下给出三斜晶系材料中各参数的表达式：

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= C_{11}n_1^2+C_{66}n_2^2+C_{55}n_3^2+2C_{56}n_2n_3+2C_{15}n_3n_1+2C_{16}n_1n_3\\
\beta &= C_{66}n_1^2+C_{22}n_2^2+C_{44}n_3^2+2C_{24}n_2n_3+2C_{46}n_3n_1+2C_{26}n_1n_3\\
\gamma &= C_{55}n_1^2+C_{44}n_2^2+C_{33}n_3^2+2C_{34}n_2n_3+2C_{35}n_3n_1+2C_{45}n_1n_3\\
\delta &= C_{16}n_1^2+C_{26}n_2^2+C_{45}n_3^2+(C_{46}+C_{25})n_2n_3+(C_{14}+C_{56})n_3n_1\\
&\quad +(C_{12}+C_{66})n_1n_3\\
\varepsilon &= C_{15}n_1^2+C_{46}n_2^2+C_{35}n_3^2+(C_{45}+C_{36})n_2n_3+(C_{13}+C_{55})n_3n_1\\
&\quad +(C_{14}+C_{56})n_1n_3\\
\xi &= C_{56}n_1^2+C_{24}n_2^2+C_{34}n_3^2+(C_{44}+C_{23})n_2n_3+(C_{36}+C_{45})n_3n_1\\
&\quad +(C_{25}+C_{46})n_1n_3
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.2}$$

其中，n_1、n_2、n_3 分别为传播方向在 x、y、z 轴上的三个角度余弦值，即

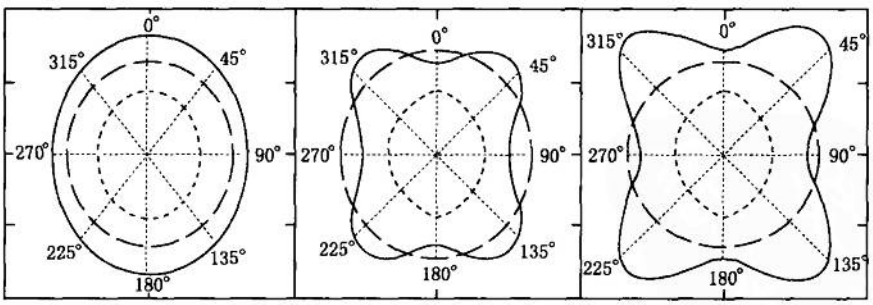
$$\left.\begin{aligned} n_1 &= k_x/k \\ n_2 &= k_y/k \\ n_3 &= k_z/k \end{aligned}\right\} \tag{3.1.3}$$

这里，k 为波数；k_x、k_y、k_z 为 x、y、z 方向的分量。三斜晶系的克里斯托弗尔方程也适用于其他晶系，只是要改变相应的劲度系数，如立方晶系中只有三个常数，其他值为零，因此可以相应的简化为

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \gamma = C_{11}n_1{}^2 + C_{44}(1 - n_1{}^2) \\ \delta &= (C_{12} + C_{44})n_1 n_2 \\ \varepsilon &= (C_{12} + C_{44})n_1 n_3 \\ \xi &= (C_{12} + C_{44})n_2 n_3 \end{aligned}$$

由克里斯托弗尔方程可以求解得到三个 $s^2 = k^2/\omega^2$ 值，s 即为各向异性介质的慢度值。以普通奥氏体不锈钢为例，其劲度系数矩阵如下，计算得到其慢度面在三个坐标平面上的界面如图 3.1 所示，可以看到，当传播方向不同时，声速差别较大。

$$C = \begin{bmatrix} 250 & 112 & 180 & 0 & 0 & 0 \\ 112 & 250 & 138 & 0 & 0 & 0 \\ 180 & 138 & 250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 117 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 91.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} \tag{3.1.4}$$

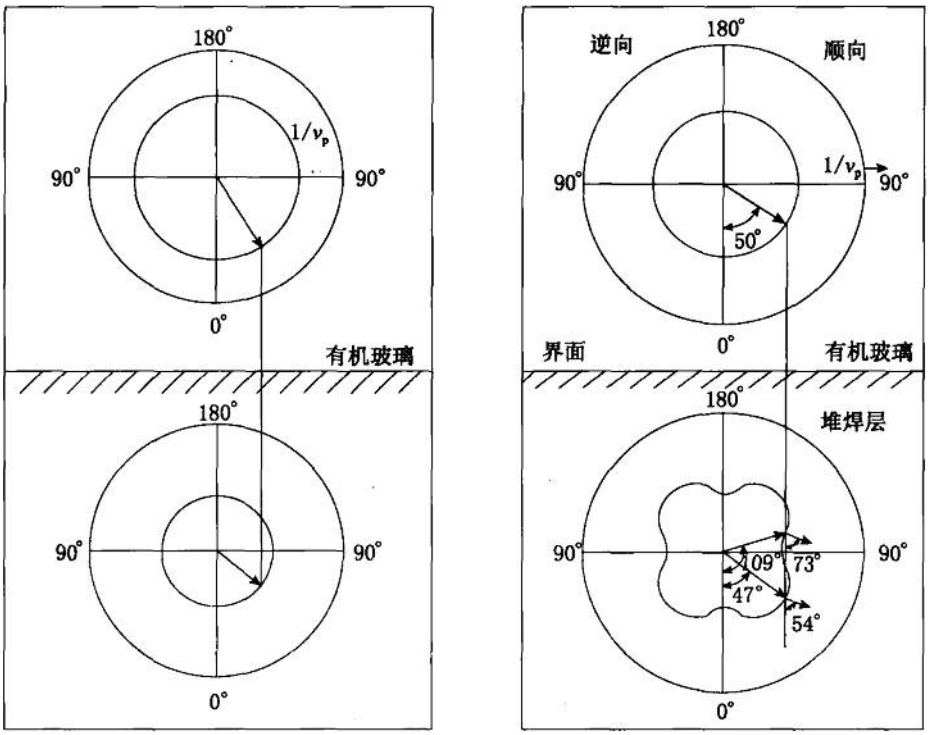


(a) *Oxy*面　　(b) *Oyz*面　　(c) *Oxz*面

图 3.1　奥氏体不锈钢的慢度图

超声波在各向异性介质中传播时，遇到界面所产生的反射透射现象均符合斯内尔定律，即入射相速度、反射相速度和透射相速度在同一平面内，入射声束、反射声束和透射声束的慢度($1/v_p$)在界面上的投影值相等。用作图法可以得到入射声

束与透射声束相速度间的关系，如图 3.2 所示。图 3.2(a)中上下介质均为各向同性介质，其慢度面均为球形，当超声波透射时，可以看到入射声束与透射声束的慢度在界面的投影相等，图 3.2(b)中下层介质为各向异性介质，其慢度面不规则，在已知入射声束的情况下按照斯内尔定律作图，可以得到对应的透射声束的相速度。从图 3.2(b)的慢度面可以看出，超声波折射后，除主声束外，还会产生其他角度的声束，多声束很难被消除，它们主要取决于晶粒的倾斜角度和声束入射角度。



(a) 各向同性介质的透射　　(b) 各向异性介质的透射

图 3.2　作图法求解透射角

3.2　多元高斯声束叠加法[3,4]

3.2.1　均质各向异性介质

在各向同性介质介质中，超声波的传播方程可以表示为 $u_i = U_i(x)\exp(i\omega[T(x) - t])$，但是在各向异性介质中，高频声波只是沿着群速度方向传播，所以超声波的传播方程在如图 3.3 所示的群速度坐标系中表示为

$$u_i = U_i(D)d_i\exp(\mathrm{i}\omega[D/c_0 + \hat{M}_{ij}^{(q)}(D)q_iq_j/2 - t]) \tag{3.2.1}$$

式中，y_3 方向为慢度矢量方向；q_3 对应群速度方向；q_1 与 q_2 在垂直于声束的平面内；c_0 为群速度；D 为声束沿群速度方向传播的距离；$\hat{M}_{ij}^{(q)}(D)$是一个 3×3 的矩阵：

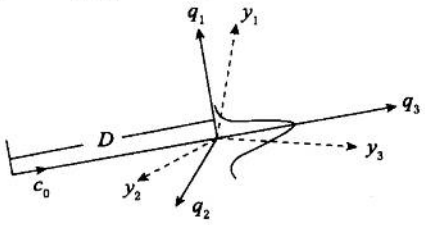


图 3.3　群速度坐标系下的高斯声束

$$\hat{M}_{ij}^{(q)}(D) = \begin{bmatrix} M_{11}^{(q)}(D) & M_{12}^{(q)}(D) & 0 \\ M_{21}^{(q)}(D) & M_{22}^{(q)}(D) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.2}$$

令 $c^{(q)} = [0,0,c_0]$，则有

$$\hat{M}_{ij}^{(q)} \cdot c^{(q)} = 0 \tag{3.2.3}$$

若在图 3.3 中，y 坐标系以群速度 c 沿着 q_3 方向运动，此时式(3.2.1)可以写成

$$u_i = U_i(D)d_i\exp(\mathrm{i}\omega[D/c_0 + \hat{M}_{ij}^{(y)}(D)y_iy_j/2 - t]) \tag{3.2.4}$$

同时 $\hat{M}_{ij}^{(y)}(D)$矩阵中的九个元素将全为非零元素。慢度坐标系下的群速度 $c^{(y)} = [c_1^{(y)}, c_2^{(y)}, 1/s_0]$，则有

$$\hat{M}_{ij}^{(y)} \cdot c^{(y)} = 0 \tag{3.2.5}$$

式中

$$\hat{M}_{i3}^{(y)} = -\frac{1}{v_0}\hat{M}_{ij}^{(y)}c_j^{(y)}$$

$$\hat{M}_{33}^{(y)} = -\frac{1}{v_0^2}\hat{M}_{ij}^{(y)}c_i^{(y)}c_j^{(y)}$$

其中，$v_0 = c_S$ 为相速度。

如图 3.4 所示，R 为某声束轴线，R'为近轴射线，c_0、c 分别为轴线和近轴声束的群速度，s_0、s 分别为轴线和近轴声束的慢度，则在慢度坐标系 y 下

$$T(R') = T(R) + s^{(y)}(T)\cdot\tilde{y} + \frac{1}{2}\tilde{y}^{\mathrm{T}}\hat{M}^{(y)}(R)\tilde{y} \tag{3.2.6}$$

式中，$\hat{M}_{ij}^{(y)}(R) = \left.\dfrac{\partial^2 T}{\partial y_i y_j}\right|_R$；$s_i^{(y)}(R) = \left.\dfrac{\partial T}{\partial y_i}\right|_R$；$i,j = 1,2,3$。

因为是慢度坐标系下，所以有

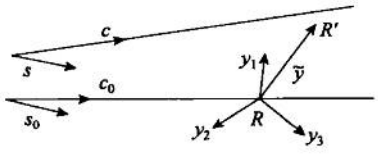


图 3.4　超声波沿轴线传播的示意图

$$\left.\begin{aligned} s^{(y)}(R) &= s_0 = [0,0,s_0] \\ s^{(y)}(R') &= s_0 + \hat{M}^{(y)}(R)\tilde{y} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.7}$$

由于轴线和轴线近似平行，所以近似有 $s^{(y)}(R) = [s_1^{(y)}, s_2^{(y)}, s_0]$，其中的 $s_1^{(y)}$、$s_2^{(y)}$ 远小于 s_0。由式(3.2.7)可得

$$\tilde{y} = [\hat{M}^{(y)}(R)]^{-1}(s^{(y)} - s_0) \tag{3.2.8}$$

根据式(3.2.8),在 y_1、y_2 上有

$$\tilde{y}_i = \hat{M}_{ij}^{-1,(y)}(R)s_j^{(y)} \tag{3.2.9}$$

式中,$\hat{M}_{ij}^{-1,(y)}$ 为 $[\hat{M}^{(y)}(R)]^{-1}$ 中的一项。近轴上的点可以由参数 $(s_1^{(y)}, s_2^{(y)})$ 表征,即 $\tilde{y}(s_1^{(y)}, s_2^{(y)})$。由式(3.2.9)得

$$\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial s_j^{(y)}} = \hat{M}_{ij}^{-1,(y)}(R) \tag{3.2.10}$$

沿着近轴射线上的声速定义为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}_i}{\mathrm{d}t} = c_i^{(y)} \tag{3.2.11}$$

结合式(3.2.10)和式(3.2.11)分析可得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{M}_{ij}^{-1,(y)}(R)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial c_i^{(y)}}{\partial s_j^{(y)}} \\ \frac{\mathrm{d}\hat{M}_{ij}^{-1,(y)}(R)}{\mathrm{d}D} &= \frac{1}{c_0}\frac{\partial c_i^{(y)}}{\partial s_j^{(y)}} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.12}$$

求解式(3.2.12)可以计算得到声束传播过程中 y_1、y_2 上 $\hat{M}_{ij}^{(y)}$ 的变化,$\hat{M}_{ij}^{(y)}$ 则表征了声束传播过程中近轴上的传播规律,式(3.2.12)的右边可以表示为与慢度有关的相。近轴上的慢度矢量幅值可以表示为

$$\begin{aligned} s &= \tilde{S}(s_1^{(y)}, s_2^{(y)}) \\ &= \tilde{S}(0,0) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial s_1^{(y)}}\bigg|_{(0,0)} s_1^{(y)} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial s_2^{(y)}}\bigg|_{(0,0)} s_2^{(y)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{(\partial s_1^{(y)})^2}\bigg|_{(0,0)} (s_1^{(y)})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{(\partial s_1^{(y)})^2}\bigg|_{(0,0)} (s_1^{(y)})^2 + \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial s_1^{(y)}\partial s_2^{(y)}}\bigg|_{(0,0)} s_1^{(y)} s_2^{(y)} \\ &= s_0 + \tilde{A}_1 s_1^{(y)} + \tilde{A}_2 s_2^{(y)} + \tilde{C}_{11}(s_1^{(y)})^2 + \tilde{C}_{22}(s_2^{(y)})^2 + \tilde{C}_{12} s_1^{(y)} s_2^{(y)} \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

式中,s_0 为轴线上的慢度矢量幅值;$\tilde{A}_1$、$\tilde{A}_2$ 表征群速度与相速度的偏移量;$\tilde{C}_{11}$、$\tilde{C}_{22}$、$\tilde{C}_{12}$ 定义了相对于各向同性介质时的慢度面曲率的偏差。在近轴上有 $(s_1^{(y)})^2 + (s_2^{(y)})^2 + (s_3^{(y)})^2 = s_0^2$,由二阶近轴近似可得 $s_3^{(y)} \approx s_0 - [(s_1^{(y)})^2 + (s_2^{(y)})^2]/(2s_0)$,联合式(3.2.13)可得慢度坐标系下慢度面表示为

$$\begin{aligned} S(s_1^{(y)}, s_2^{(y)}, s_3^{(y)}) &= s_3^{(y)} - s_0 - \tilde{A}_1 s_1^{(y)} - \tilde{A}_2 s_2^{(y)} - (\tilde{C}_{11} - \frac{1}{2}s_0)(s_1^{(y)})^2 \\ &\quad - (\tilde{C}_{11} - \frac{1}{2}s_0)(s_1^{(y)})^2 - \tilde{C}_{12} s_1^{(y)} s_1^{(y)} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

慢度与群速度的关系为

$$c_i^{(y)} = c\frac{\dfrac{\partial S}{\partial s_i^{(y)}}}{\sqrt{\dfrac{\partial S}{\partial s_i^{(y)}}\dfrac{\partial S}{\partial s_j^{(y)}}}} = c\frac{\dfrac{\partial S}{\partial s_i^{(y)}}}{\nabla_s S} \tag{3.2.15}$$

因为$\frac{\partial S}{\partial s_3^{(y)}}=1$，且 $s\cdot c=1$，所以结合式(3.2.15)可知

$$c_3=\frac{c}{\nabla_s S}=\frac{1}{s_0} \tag{3.2.16}$$

用慢度面的相来表示群速度可得

$$c_i^{(y)}=\frac{\partial S(s_1^{(y)},s_2^{(y)},s_3^{(y)})}{\partial s_i^{(y)}}\frac{1}{s_0} \tag{3.2.17}$$

联合式(3.2.17)与式(3.2.14)可知

$$\begin{aligned}c^{(y)}=&-[\tilde{A}_1+2(\tilde{C}_{11}-1/2s_0)s_1^{(y)}+\tilde{C}_{11}s_2^{(y)},\tilde{A}_2+\\&2(\tilde{C}_{22}-1/2s_0)s_2^{(y)}+\tilde{C}_{12}s_1^{(y)},-1]/s_0\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

在轴线上 $s_1^{(y)}=s_2^{(y)}=0$，所以此时式(3.2.18)可以写成

$$c_0^{(y)}=[-\tilde{A}_1,-\tilde{A}_2,1]/s_0 \tag{3.2.19}$$

由式(3.2.19)可以看出，$\tilde{A}_1$、$\tilde{A}_2$ 表征群速度与相速度的偏移量。由式(3.2.18)可推出

$$\frac{\partial c_i^{(y)}}{\partial s_j^{(y)}}=S_{ij}^{(y)} \tag{3.2.20}$$

式中，$S_{ij}^{(y)}$ 为 $S^{(y)}$ 的元素

$$S^{(y)}=\begin{bmatrix}-2\tilde{C}_{11}+1/s_0 & -\tilde{C}_{12}\\ -\tilde{C}_{12} & -2\tilde{C}_{22}+1/s_0\end{bmatrix}/s_0 \tag{3.2.21}$$

将 $M^{-i_1(y)}(D)$ 由 $M^{-i_1(y)}(0)$ 表示，有

$$\begin{aligned}M^{-1_1(y)}(D)&=M^{-1_1(y)}(0)+\frac{D}{c_0}S^{(y)}\\&=[BM^{(y)}(0)+A][DM^{(y)}(0)+C]^{-1}\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

式中，$A=D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}(-2\tilde{C}_{11}+1/s_0)D & -\tilde{C}_{12}D\\ -\tilde{C}_{12}D & (-2\tilde{C}_{22}+1/s_0)D\end{bmatrix}/(s_0c_0)$，$C=0$，将式(3.2.22)的两边同时求逆可得

$$M^{(y)}(D)=M^{(y)}(0)[I+DS^{(y)}M^{(y)}(0)/c_0]^{-1} \tag{3.2.23}$$

式(3.2.23)描述了声束传播过程中相位项的变化。在慢度坐标系中声束的传播方程有

$$2c_0\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}D}+U\frac{\partial c_i^{(y)}}{\partial \tilde{y}_i}\bigg|_R=0 \tag{3.2.24}$$

由式(3.2.17)可以得到

$$\frac{\partial c_i^{(y)}}{\partial \tilde{y}_i}\bigg|_R=\frac{\partial c_i^{(y)}}{\partial s_j^{(y)}}\frac{\partial s_j^{(y)}}{\partial \tilde{y}_i}\bigg|_R=\frac{1}{s_0}\frac{\partial^2 S}{\partial s_i^{(y)}\partial s_j^{(y)}}\frac{\partial s_j^{(y)}}{\partial \tilde{y}_i}\bigg|_R \tag{3.2.25}$$

因为 $\frac{\partial s_j^{(y)}}{\partial \tilde{y}_i}\bigg|_R=M_{ji}^{(y)}(R)$，所以式(3.2.25)可以写成

$$\left.\frac{\partial c_i^{(y)}}{\partial \tilde{y}_i}\right|_R = S_{ij}^{(y)} M_{jl}^{(y)} \tag{3.2.26}$$

所以声束的传播方程(3.2.24)可以写成

$$2c_0 \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}D} + US_{ij}^{(y)} M_{jl}^{(y)} = 0 \tag{3.2.27}$$

将式(3.2.27)进行处理可得

$$U(D) = U(0) \frac{\sqrt{\det M^{(y)}(D)}}{\sqrt{\det M^{(y)}(0)}} \tag{3.2.28}$$

式(3.2.28)描述的是声束传播过程中幅值的变化。联合式(3.2.23)和式(3.2.28)可得波动方程：

$$u_i = U(0) \frac{\sqrt{\det M^{(y)}(D)}}{\sqrt{\det M^{(y)}(0)}} \exp\left(\mathrm{i}\omega\left[\frac{D}{c_0} + \frac{y^{\mathrm{T}} \hat{M}^{(y)}(D) y}{2-t}\right]\right) \tag{3.2.29}$$

该式用源点的幅值和相位来描述计算点处的振动方程。

3.2.2 多层各向异性介质

当某一高斯声束入射到如图 3.5 所示的曲界面上时，令高斯声束轴线入射点为 Q_m，坐标系(x_1, x_2, x_3)的坐标原点为 Q_m，且(x_1, x_3)面与声束的入射面重合，x_3 垂直于界面，y_3 为慢度矢量的方向，θ 为 x_3 与 y_3 的夹角。$(y_1^{\mathrm{I}}, y_2^{\mathrm{I}}, y_3^{\mathrm{I}})$与$(y_1, y_2, y_3)$均为慢度坐标系，其中前者为以 Q_m 为原点的固定坐标系，而(y_1, y_2, y_3)随着声束沿着群速度方向运动。

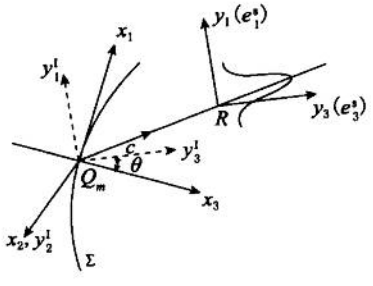


图 3.5 高斯声束穿透曲界面

由式(3.2.4)可得，声束传播到计算点的时间可以表示为

$$T^{(y)} = T_0 + D/c_0 + y^{\mathrm{T}} \hat{M}^{(y)}(D) y \tag{3.2.30}$$

式中，T_0 为声束入射到 Q_m 处的时间；D 为从点 Q_m 沿群速度方向到计算点处的距离。在入射坐标系$(y_1^{\mathrm{I}}, y_2^{\mathrm{I}}, y_3^{\mathrm{I}})$中，式(3.2.30)可以写成

$$T^{(y^{\mathrm{I}})} = T_0 + y_3^{\mathrm{I}} s_0 + \frac{M_{kj}^{(y)}(y_3^{\mathrm{I}})(y_k^{\mathrm{I}} + \tilde{A}_k y_3^{\mathrm{I}})(y_j^{\mathrm{I}} + \tilde{A}_j y_3^{\mathrm{I}})}{2} \tag{3.2.31}$$

在趋近于 Q_m 点处的界面曲率有 $x_3 = \frac{h_{ij} x_i x_j}{2}$，其中 h_{ij} 为曲率，则波动方程的时间项可以写成

$$T^{(y^{\mathrm{I}})} = T_0 + \sin\theta x_1 s_0 + \frac{h_{ij} x_i x_j}{2} + \frac{\hat{M}_{jk}^{(y)}(Q_m) y_j^{\mathrm{I}} y_k^{\mathrm{I}}}{2} \tag{3.2.32}$$

坐标系(x_1, x_2, x_3)与$(y_1^{\mathrm{I}}, y_2^{\mathrm{I}}, y_3^{\mathrm{I}})$的原点重合，所以将式(3.2.32)写成$(x_1, x_2, x_3)$坐标系下的表达式

$$T^{(x)} = T_0 + \sin\theta x_1\, s_0 + \frac{h_{ij}x_i x_j \cos\theta s_0}{2} + \frac{G_{ik}G_{jm}\hat{M}_{km}^{(y)}(Q_m)x_j x_k}{2} \tag{3.2.33}$$

式中，G 为坐标系转换矩阵，即为

$$G = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

将式(3.2.33)近似处理得到

$$T^{(x)} = T_0 + \sin\theta x_1 s_0 + \frac{(h_{ij}\cos\theta s_0 + G_{ik}^{A}M_{km}^{(y)}G_{jm}^{A})x_i x_j}{2} \tag{3.2.34}$$

式中

$$G^{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta - \sin\theta s_0 c_1 & -\sin\theta s_0 c_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta + \sin\theta\widetilde{A}_1 & \sin\theta\widetilde{A}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式(3.2.34)表示的是声束处于界面处时的相位项，该式既可以当做入射声束的相位项，也可以看做透射声束的相位项。声束在多层介质传播过程中，根据边界连续性条件有 $T_0^m = T_0^{m+1} = T_0$，其中上标 m 是指多层介质中的第 m 层。根据斯内尔定律可知，式(3.2.34)的第二项保持不变，即 $\sin\theta_m s_m = \sin\theta_{m+1}s_{m+1}$，所以

$$h_{ij}\cos\theta_m s_m + G_{m,ik}^{A}M_{m,km}^{(y)}G_{m,jm}^{A} = h_{ij}\cos\theta_{m+1}s_{m+1} + G_{m+1,ik}^{A}M_{m+1,km}^{(y)}G_{m+1,jm}^{A} \tag{3.2.35}$$

$$\cos\theta_m s_m H + G_m^{A}M_m^{(y)}(G_m^{A})^{\mathrm{T}} = \cos\theta_{m+1}s_{m+1}H + G_{m+1}^{A}M_{m+1}^{(y)}(G_{m+1}^{A})^{\mathrm{T}} \tag{3.2.36}$$

式中，H 为界面处的曲率矩阵。由式(3.2.36)求解矩阵 $M_{m+1}^{(y)}$ 可得

$$\begin{aligned} M_{m+1}^{(y)} &= (G_{m+1}^{A})^{-1}[(\cos\theta_m s_m - \cos\theta_{m+1}s_{m+1})H + G_m^{A}M_m^{(y)}(G_m^{A})^{\mathrm{T}}][(G_{m+1}^{A})^{\mathrm{T}}]^{-1} \\ &= (D_m^t M_m^{(y)} + C_m^t)(B_m^t M_m^{(y)} + A_m^t)^{-1} \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

其中

$$A_m^t = \frac{\begin{bmatrix} \cos\theta_{m+1} + \sin\theta_{m+1}\widetilde{A}_1^{m+1} & 0 \\ \sin\theta_{m+1}\widetilde{A}_2{}^{m+1} - \sin\theta_m\widetilde{A}_2^m & \cos\theta_m + \sin\theta_m\widetilde{A}_1^m \end{bmatrix}}{\cos\theta_m + \sin\theta_m\widetilde{A}_1^m}$$

$$B_m^t = 0$$

$$D_m^t = \begin{bmatrix} \cos\theta_m + \sin\theta_m\widetilde{A}_1^m & -\sin\theta_{m+1}\widetilde{A}_2^{m+1} + \sin\theta_m\widetilde{A}_2^m \\ 0 & \cos\theta_{m+1} + \sin\theta_{m+1}\widetilde{A}_1^{m+1} \end{bmatrix}$$

$$C_m^t = \frac{\cos\theta_m s_m - \cos\theta_{m+1}s_{m+1}}{(\cos\theta_m + \sin\theta_m\widetilde{A}_1^m)(\cos\theta_{m+1} + \sin\theta_{m+1}\widetilde{A}_1^{m+1})} \begin{bmatrix} C_{11}^t & C_{12}^t \\ C_{21}^t & C_{22}^t \end{bmatrix}$$

这里

$$C_{11}^{i}=h_{11}-h_{21}\sin\theta_{m+1}\widetilde{A}_2^{m+1}-\sin\theta_m\widetilde{A}_2^{m}(h_{12}-h_{22}\sin\theta_{m+1}\widetilde{A}_2^{m+1})$$
$$C_{12}^{i}=(\cos\theta_m+\sin\theta_m\widetilde{A}_1^{m})(h_{12}-h_{22}\sin\theta_{m+1}\widetilde{A}_2^{m+1})$$
$$C_{21}^{i}=(h_{21}-h_{22}\sin\theta_m\widetilde{A}_2^{m})(\cos\theta_{m+1}+\sin\theta_{m+1}\widetilde{A}_1^{m+1})$$
$$C_{22}^{i}=h_{22}(\cos\theta_m+\sin\theta_m\widetilde{A}_1^{m})(\cos\theta_{m+1}+\sin\theta_{m+1}\widetilde{A}_1^{m+1})$$

则多层介质中的波动方程为

$$u_{M+1}(x,t)=U_1(0)\frac{\sqrt{\det M_{M+1}^{(y)}(D_{M+1})}}{\sqrt{\det M_{M+1}^{(y)}(0)}}d_{m+1}\prod_{m=1}^{M}T_{m,m+1}\frac{\sqrt{\det M_m^{(y)}(D_m)}}{\sqrt{\det M_m^{(y)}(0)}}$$
$$\times\exp\left(\mathrm{i}\omega\left(\sum_{m=1}^{M+1}\frac{D_m}{c_m}+\frac{1}{2}y^{\mathrm{T}}\widetilde{M}_{M+1}^{(y)}y-t\right)\right),\quad m=1,2,3,\cdots,M \tag{3.2.38}$$

图 3.6 为纵波入射到三种不同各向异性介质中三个声束的在距离界面 100mm 处的垂直于声束轴线的截面图。三种材质的参数只在 $\widetilde{C}_{12}$ 上不同，图 3.6(a)中 $\widetilde{C}_{12}=17\mathrm{mm}/\mu\mathrm{s}$，图 3.6(b)中 $\widetilde{C}_{12}=10\mathrm{mm}/\mu\mathrm{s}$，图 3.6(c)中 $\widetilde{C}_{12}=0\mathrm{mm}/\mu\mathrm{s}$。可见慢度参数对声束形状影响较大，随着 $\widetilde{C}_{12}$ 的减小，声束宽度在增加。



(a) (b) (c)

图 3.6 声束截面图

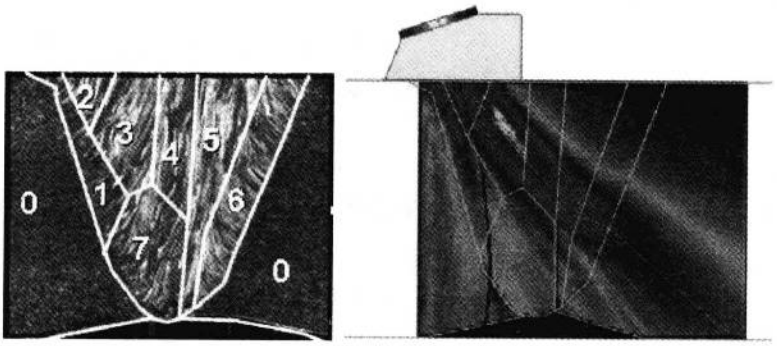
3.3 瑞利积分法

利用瑞利积分法进行各向异性介质中声束计算的特殊性在于 Pencil 法中的传递矩阵[5,6]，在多层各向异性介质中，式(2.3.11)速度势可以表示为

$$\Psi'=\prod_{m=1}^{M}\begin{bmatrix}1&0&-r_{k_1m}g_{20}&-r_{k_1m}g_{11}\\0&1&-r_{k_1m}g_{11}&-r_{k_1m}g_{02}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\Psi \tag{3.3.1}$$

式中，m 为多层介质中的第 m 层，根据式(2.3.10)可以计算出相应的 DF 值。

如图 3.7 所示，非均质各向异性介质的焊缝可划分成若干部分，每一部分近似为均质各向异性介质，因此非均质各向异性介质中超声波的传播问题被转化成了多层各向异性介质中超声波的传播问题，这时利用瑞利积分法就可计算分析焊缝上的声压分布。用 45°纵波接触式探头对焊缝进行检测，发现焊缝中各种不同的晶体方向使得超声波束发射偏转和分离，图 3.7(b)中包含了横波和纵波的声压分布，其中纵波在穿过不同区域时发生微弱的偏转，横波在图中不明显。



(a) 焊缝划分　　(b) 声压分布

图 3.7　焊缝中的超声波束

3.4　射线追踪法

在超声检测过程中，了解声线在工件中的传播路径有助于缺陷信号的识别和评定。对于结构复杂、材质特殊的工件，声线的传播不是直线，声线传播路径的计算显得更为必要。射线追踪方法是一种计算声线在介质中传播路径及振幅衰减的方法，常用于非均质各向异性介质检测的模拟[7~10]。该方法处理过程主要分三大步：① 求解各向异性介质的弹性波波动方程，得到能量速度方向及质点位移方向；② 沿着能量速度方向步进一个距离，对于非均质介质，划分成均质区域给出适当的边界条件；③ 计算边界上的反射和折射声线，利用边界条件计算反射和折射声线的振幅。

3.4.1　步进追踪

利用 3.1 节中的弹性波波动方程求解各向异性介质声场。选择能量速度方向作为步进方向。对于无频散特性的均质材料，射线传播在到达均质区域边界之前，传播方向不变，声线追踪比较简单。但是对于非均质材料，由于不同区域弹性系数的改变，使得各个位置求解的能量速度不同，导致声线传播路径为曲线。

一般对于非均质材料，通常将其离散成很多个晶粒，相邻晶粒之间的取向略有不同。沿着能量速度方向，以晶粒尺寸为步长，追踪声线，考虑声线在每个晶界上

折射和反射后的方向和振幅的变化。将每个晶粒上的声线线段连接，即得到射线传播路径。具体的追踪过程如下：

(1) 得到当前声线位置和该点晶粒取向。

(2) 沿能量传播方向步进一个单元，判断是否存在区域变化。

(3) 得到新声线位置和晶粒取向。

(4) 如图 3.8 所示，得到与两个晶粒取向夹角相等的矢量，定义其为晶界，晶界位于两点的中点。

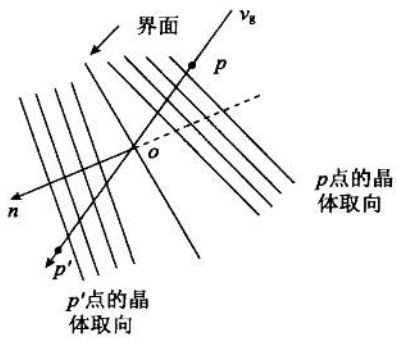


图 3.8 界面处的折射

(5) 计算从老位置到晶粒界面的声线，找到相同波形的折射波及其相速度位移、群速度振幅。

(6) 利用新的折射波群速度，从界面开始传播一半的路径，得到新的声线位置及相关参数。

(7) 利用第(6)步得到的振幅和原声线振幅相乘，得到累积振幅变化。

(8) 返回第(1)步，直到发现区域变化。

当射线入射到两个区域的界面时，产生反射和折线线，其方向和振幅由入射声线和晶界处的边界条件得到。

为了满足晶界应力应变连续性条件，折射前后的平面波沿着晶界的分量必须相同。这样，慢度矢量在晶界上的投影必须相同。利用界面及慢度面几何构造，可以求得折射声线，如图 3.9 所示，两种材料为各向异性，慢度面为椭圆形。当波以一个特定的角 θ_1 入射到材料 1 时，则波沿着界面的分量为常量，这是斯内尔定律的另一种表达，一次可以计算出材料 2 中的折射角。

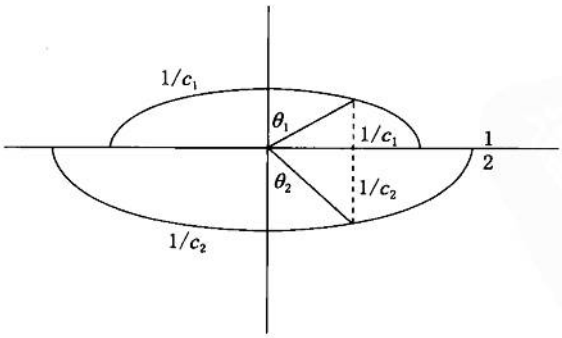


图 3.9 各向异性介质中的透射示意图

射线追踪法的应用需要满足两个几何条件：

(1) 几何结构允许每个区域可以用晶界平面来描述。这些平面在输入中定

义，输入量为法向量及平面上的一点。所以，对于给定的结构，必须确定一个合适的原点，并定义平面。

(2) 每个区域的晶体结构可以用该区域的任意点来描述。区域为液体或固体，固体可能是各向同性、各向异性或者横向各向同性。各向异性介质可以是均质或非均质的。如果是均质的，晶轴取向可以用欧拉角表示；如果是非均质的，则利用欧拉角定义一个晶体坐标系，任意点的局部晶体结构定义为空间坐标函数。

值得注意的是，射线追踪法还需要满足四个假设条件：

(1) 假设几何条件满足，没有衍射作用。

(2) 界面完全光滑。

(3) 忽略非弹性的影响。

(4) 假设界面上任意入射点的、沿着界面方向的应力都可以用局部弹性常数计算。

3.4.2　计算实例

图 3.10 为一奥氏体焊缝照片，包含四个部分：碳钢、预堆边、奥氏体焊缝和奥氏体钢。由于奥氏体焊缝不是中心对称的，这样左边和右边的焊缝要分开处理，利用分段函数来模拟奥氏体晶体结构：

$$F(y,z)=\begin{cases}\tan\theta_1=\dfrac{T_1(D_1+z\tan\alpha_1)}{y^{\eta_1}}, & y>0\\ \tan\theta_2=\dfrac{T_2(D_2+z\tan\alpha_2)}{|y|^{\eta_2}}, & y<0\end{cases} \tag{3.4.1}$$

式中，T_1、T_2 正比于晶轴在斜坡边缘的切线；参数 η_1 和 η_2 为 0 或 1，η_1 表示测量得到的右边的晶体结构随着 y 的增加而下降的速度，η_2 代表左边。

基于图 3.10 画出了每个网格取向，并应用边缘检测、伸缩填充、骨架法来得到初步的晶体结构，将边缘像素连接成直线，在两点之间插入带有位置信息的线段，并计算斜率。然后，计算所有网格的斜率得到工件取向分布。最后利用非线性回归法得到优化的参数 T_1、T_2 和 η_1、η_2。利用优化参数得到的奥氏体焊缝模型如图 3.11所示。

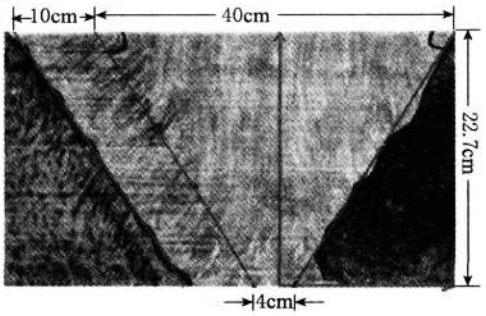


图 3.10　焊缝宏观图片

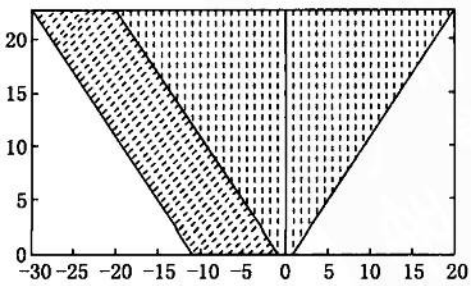


图 3.11　优化参数的焊缝模型

按照射线追踪步骤进行追踪，得到准纵波奥氏体焊缝声线路径如图 3.12 所示。探头位置分别为 $x_1=(-31,22.7)$，$x_2=(28,22.7)$，相应的入射角度分别为 $\theta_1=25°$、$\theta_2=-26°$。

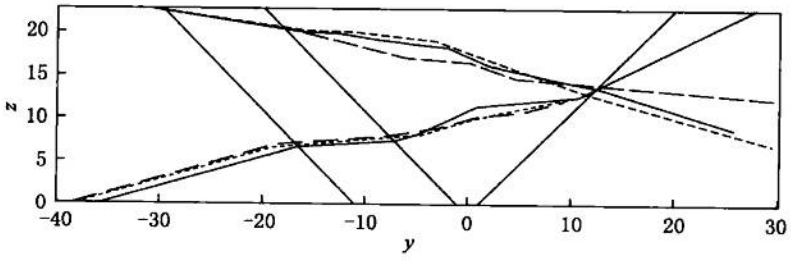
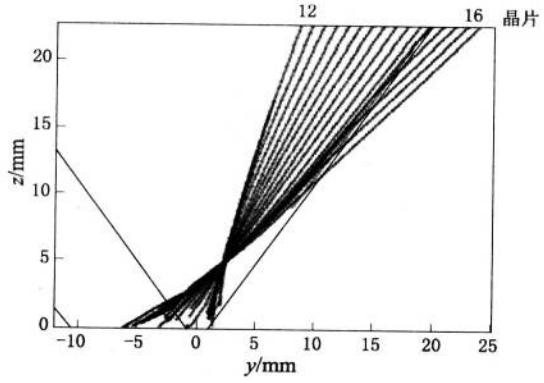
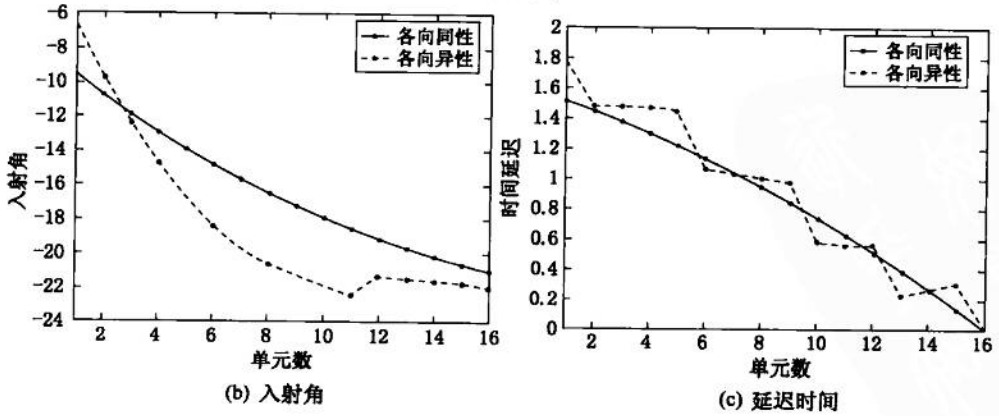


图 3.12 声线追踪法得到的准纵波奥氏体焊缝声线路径

还可利用射线追踪法计算相控阵检测中晶片的延迟时间，以达到所需偏转角度和聚焦点。首先，追踪每个晶片到达指定聚焦点的路径，记录入射角度，然后计算晶片延迟时间。图 3.13(a)计算了到达聚焦点时的射线追踪结果，图 3.13(b)给



(a) 追踪结果



(b) 入射角　　(c) 延迟时间

图 3.13 声线追踪法的相控阵应用

出了 16 个晶片到达聚集点所需要的入射角度，图 3.13(c)给出了声束到达聚焦点所需的每个晶片的延迟时间，可以看到在奥氏体焊缝相控阵检测时，声线聚焦复杂，晶片的时间延迟取决于焊缝晶体结构。

3.5　有限差分法

在各向异性介质中，由于劲度矩阵较为复杂，所以应力应变间的关系也变得复杂[11]，具体表现为

$$[\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{zz},\sigma_{zy},\sigma_{zx},\sigma_{xy}]^{\mathrm{T}}=C[\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{zy},\varepsilon_{zx},\varepsilon_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{3.5.1}$$

式中，C 为介质的劲度矩阵；σ 为应力分量；ε 为应变分量。

令 $L_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$，$L_y=\dfrac{\partial}{\partial y}$，$L_z=\dfrac{\partial}{\partial z}$，则有介质中的运动方程为

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_x & 0 & 0 & 0 & L_z & L_y\\0 & L_y & 0 & L_z & 0 & L_x\\0 & 0 & L_z & L_y & L_x & 0\end{bmatrix}[\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{zz},\sigma_{zy},\sigma_{zx},\sigma_{xy}]^{\mathrm{T}}+\rho[f_x,f_y,f_z] \tag{3.5.2}$$

式中，u_x、u_y、u_z 为位移分量；$[f_x,f_y,f_z]$为外力矢量。式(3.5.1)和式(3.5.2)联合即为介质中的应力弹性波方程。假设 $u(x)$有 $2L+1$ 阶导数，在 $x=x_0\pm\dfrac{(2m-1)\Delta x}{2}$处进行泰勒展开得

$$u\left(x_0\pm\frac{(2m-1)\Delta x}{2}\right)=u(x_0)+\sum_{t=1}^{2L+1}\frac{\left[\dfrac{\pm(2m-1)}{2}\right]^t(\Delta x)^t}{t!}u^{(t)}(x_0)+o(\Delta x^{2L+1}) \tag{3.5.3}$$

由差分近似有

$$\begin{aligned}\Delta x\frac{\partial u(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0}&=\sum_{m=1}^{L}a_m\left[u\left(x_0+\frac{(2m-1)\Delta x}{2}\right)-u\left(x_0-\frac{(2m-1)\Delta x}{2}\right)\right]\\&\quad+e_L u^{2L+1}(x_0)\Delta x^{2L+1}+o(\Delta x^{2L+2})\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

将式(3.5.3)代入式(3.5.4)得

$$\begin{aligned}\Delta x u^L(x_0)&=\sum_{m=1}^{L}(2m-1)\Delta x a_m u^L(x_0)\\&\quad+\sum_{m=1}^{L}\sum_{t=1}^{L-1}(2m-1)^{2t+1}\frac{\Delta x^{2t+1}a_m u^{(2t+1)}(x_0)}{(2t+1)!}\\&\quad+\sum_{m=1}^{L}\frac{(2m-1)^{2L+1}\Delta x^{2L+1}a_m u^{2L+1}(x_0)}{(2L+1)!}+o(\Delta x^{2L+2})\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

式中，$L=1$ 时，$a_1=1$，$e_1=1/24$；$L=2$ 时，$a_1=9/8$，$a_2=-1/24$，$e_2=-3/640$

$$a_m=\frac{(-1)^{m+1}\prod_{t=1,t\neq m}^{L}(2t-1)^2}{(2m-1)\prod_{t=1}^{L-1}[(2m-1)^2-(2t-1)^2]}$$

$L>2$ 时

$$e_L=2\sum_{m=1}^{L}\left(\frac{2m-1}{2}\right)^{2L+1}a_m$$

差分法的严格稳定性条件为 $\dfrac{\Delta t C_{\max}\sqrt{\dfrac{1}{\Delta x^2}+\dfrac{1}{\Delta y^2}+\dfrac{1}{\Delta z^2}}}{\rho}\leqslant\dfrac{1}{\sum|a_m|}$，其中 $C_{\max}=\|C\|_\infty$，C 为劲度矩阵。

以正交晶系的各向异性介质为例，计算介质中波动的传播过程。发射源的中心频率为 20Hz，Δt 为 1ms，计算结果如图 3.14 所示，在不同截面上可以看到准纵波、准 SH 波和准 SV 波的瞬态声压分布。

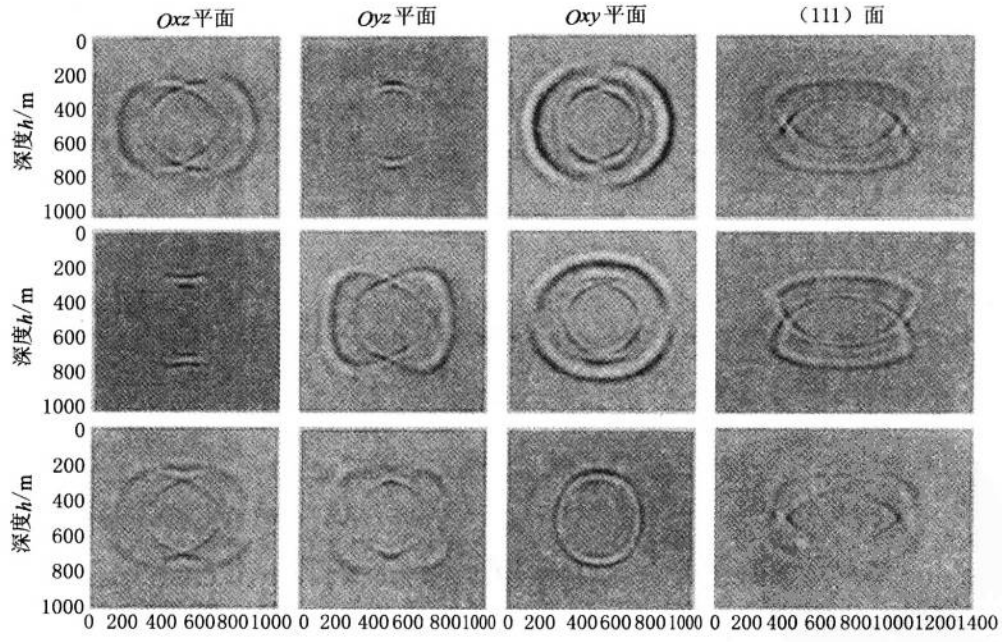


图 3.14 有限差分法模拟各向异性介质中的波动

参 考 文 献

[1] Auld. B A. Acoustic Fields and Waves in Solids[M]. New York : Wiley, 1973.

[2] Hudgell R J. Handbook on the ultrasonic examination of austenitic clad steel components [M]. European Commission, Joint Research Certre Institute of Advanced Material, 1994.

[3] Huang R J, Schmerr L W Jr, Sedov A. Multi-Gaussian beam modeling for multi-layered anisotropic media, Ⅰ: Modeling foundation[J]. Research in Nondestructive Evaluation, 2007, 18(4): 193-220.

[4] Huang R J, Schmerr L W Jr, Sedov A. Multi-Gaussian beam modeling for multi-layered anisotropic media, Ⅱ: Numerical examples of slowness surface and geometry effects [J]. Research in Nondestructive Evaluation, 2007, 18(4): 221-240.

[5] Gengembre N, Lhe′mery A. Pencil method in elastodynamics: Application to ultrasonic field computation[J]. Ultrasonics, 2000, 38: 495-499.

[6] Mahaut S, Chatillon S, Leymarie N, et al. Simulation tools for predicting non destructive testing of Heterogeneous and anisotropic structures[C]. International Congress on Ultrasonics, 2007.

[7] Johnson J A. Ray trace calculations of ultrasonic fields[J]. Research in Nondestructive Evaluation, 1991, 3: 27-39.

[8] Ye J. Development of an ultrasonic ray model for phased array ultrasonic testing in austenitic weldments[C]. 17 th World Conference on Nondestructive Testing, 25-28 Oct 2008, Shanghai, China, 2008.

[9] Erhard A. Modeling for the improvement of dissimilar weld inspection[C]. 16th World Conference on Nondestructive Testing, Aug30-Sept3, Montreal, Canada, 2005.

[10] Ogilvy J A. Ultrasonic beam profiles and beam propagation in an austenitic weld using a theoretical ray tracing model[J]. Ultrasonic, 1986, 24(6): 337-347.

[11] 裴正林. 三维各向异性介质中弹性波方程交错网格高阶有限差分法数值模拟[J]. 石油大学学报, 2004, 28(5).

第 4 章　缺陷与结构散射声场

超声检测主要是通过分析探头接收到的缺陷和结构散射声场来评定被检物，因此准确地计算缺陷与结构散射声场是实现检测信号分析的关键。处理缺陷和结构散射问题常用的方法分为解析法、半解析法和数值法。早期的解析方法是以数学分析为基础，求解微分方程定解问题，求解过程要求严格的物理概念与逻辑推理，所以只能用于求解比较简单的问题，处理规则形状的缺陷。数值法，包括有限元方法、有限差分法、边界元法、弹性动力积分法等以离散数学为基础、以计算机为工具的求解方法，虽然其理论基础远不如解析法严密，但它在计算精度和适应性方面还是有较大优势的。数值法的计算一般需要较很长时间。近年来，随着应用于其他领域的各种处理散射问题的近似理论的引入（如基尔霍夫(Kirchhoff)近似理论、波恩(Born)近似理论等），用解析法建立的超声场与缺陷相互作用模型在保证计算精度的同时大大提高了计算速度，成为模拟声场与缺陷相互作用的主流，并得到了广泛应用。

4.1　规则体的散射

4.1.1　空心圆柱散射[1,2]

假设各向同性介质中存在一半径为 r 的空心圆柱体，圆柱体轴线与 z 轴重合，入射波沿 x 轴入射，如图 4.1 所示。在柱坐标下的波动方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 P}{r^2\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+k^2P=0 \tag{4.1.1}$$

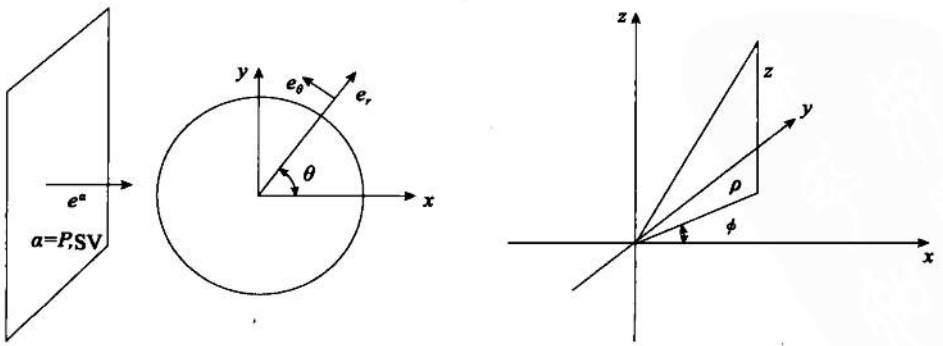


图 4.1　平面波在空心圆柱的散射

利用分离变量法，设 $P=U(r,\phi)S(z)$，得到程函方程和传输方程：

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}+k_z{}^2 S=0 \tag{4.1.2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 U}{r^2\partial\phi^2}+k_r{}^2 U=0 \tag{4.1.3}$$

式(4.1.2)的解为 $S(z)=\exp(\pm ik_z z)$。式(4.1.3)为振幅所满足的贝塞尔方程，其解可以写为贝塞尔函数的形式

$$U(r)=AH_n^{(2)}(k_r r)+BH_n^{(1)}(k_r r) \tag{4.1.4}$$

式中，$H_n^{(1)}(x)$和 $H_n^{(2)}(x)$分别为第一类和第二类汉开尔函数。对于向外传播的散射场，式(4.1.4)取 $B=0$，最终散射波的振幅可以表示为

$$U(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}AH_n^{(2)}(k_r r)\cos n\phi \tag{4.1.5}$$

在柱坐标下，入射场可以表示为

$$u_i=U_0\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-1)^n J_n(k_r r)\cos n\phi \tag{4.1.6}$$

式中，$n>0$ 时 $\varepsilon_n=2$，$n=0$ 时 $\varepsilon_n=1$；$J_n(k_r r)$为贝塞尔函数。

在圆柱表面上，散射后的总位移场等于入射场和散射场之和，并且满足位移为零的边界条件。对于半径为 a 的空心圆柱，由边界条件得到的方程为

$$U_0\sum_{n=0}^{\infty}\left[\varepsilon_n(-1)^n\frac{\mathrm{d}J_n(k_r r)}{\mathrm{d}r}+A_n\frac{\mathrm{d}H_n^{(2)}(k_r r)}{\mathrm{d}r}\right]\cos n\phi\Bigg|_{r=a}=0 \tag{4.1.7}$$

利用 $\cos n\phi$ 的正交性，解得散射振幅的系数 A_n 为

$$A_n=\frac{\dfrac{\varepsilon_n(-1)^n U_0\mathrm{d}J_n(k_r r)}{\mathrm{d}r}}{\dfrac{\mathrm{d}H_n^{(2)}(k_r r)}{\mathrm{d}r}} \tag{4.1.8}$$

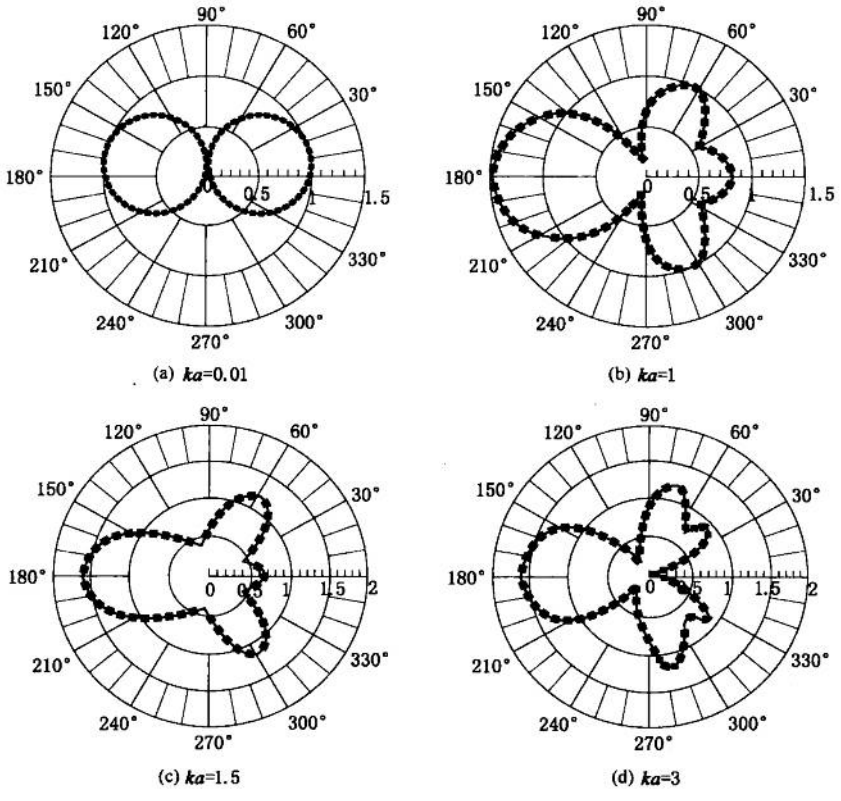
在不同 ka(瑞利散射，其中，a 为球体单位，k 为波矢)值，SV 平面波在空心圆柱上散射的计算结果如图 4.2 所示。可以看到，当入射波的波长远远小于圆柱直径时，大部分能量为直接反射。

4.1.2　球形体散射[2,3]

假设各向同性介质中存在一半径为 r 的球体，球体与坐标原点重合，在如图 4.1 所示坐标系下，设 z 轴方向入射的平面波为 $u=U_0\exp(ikz)$，在球坐标系下的波动方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial U}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}+k^2U=0 \tag{4.1.9}$$

入射平面波可以展开为勒让德函数的级数形式



(a) ka=0.01　(b) ka=1

(c) ka=1.5　(d) ka=3

图 4.2　散射场沿圆柱表面的分布

$$U = U_0 \exp(\mathrm{i}kz) = U_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\mathrm{i}^n U_n(\cos\phi)\mathrm{J}_n(kr) \qquad (4.1.10)$$

利用 4.1.1 节中的分离变量法和勒让德函数的正交性，可得横波和纵波散射场分别为

$$\left.\begin{aligned} \Psi_s &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathrm{H}_n(k_{\mathrm{L}1} r) U_n(\cos\phi) \\ H_s &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \mathrm{H}_n(k_{\mathrm{T}1} r) U_n(\cos\phi) \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.11)$$

在球体内部横波和纵波场可以表示为

$$\left.\begin{aligned} \Psi_q &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mathrm{H}_n(k_{\mathrm{L}2} r) U_n(\cos\phi) \\ H_q &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \mathrm{H}_n(k_{\mathrm{T}2} r) U_n(\cos\phi) \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.12)$$

然后利用球体表面的应力和位移边界条件来求得散射场的系数 A_n 和 B_n。在

实际应用中，可将球体缺陷分为弹性球体、刚性球体和空心球体，分别对应不同的边界条件。

(1) 弹性球体，如工业检测中的夹渣类缺陷和医学检测中的人体囊肿等，这类缺陷的声学参数与周围介质不同，在周围介质中存在入射应力场 σ^{I}、散射应力场 σ^{S}、入射位移场 u^{I} 和散射位移场 u^{S}，在球体内也存在应力场 σ^{Q} 和位移场 u^{Q}，在球坐标系下满足边界条件：

$$u_r^{\mathrm{I}}+u_r^{\mathrm{S}}=u_r^{\mathrm{Q}},\quad u_\phi^{\mathrm{I}}+u_\phi^{\mathrm{S}}=u_\phi^{\mathrm{Q}},\quad \sigma_{rr}^{\mathrm{I}}+\sigma_{rr}^{\mathrm{S}}=\sigma_{rr}^{\mathrm{Q}},\quad \sigma_{\phi r}^{\mathrm{I}}+\sigma_{\phi r}^{\mathrm{S}}=\sigma_{\phi r}^{\mathrm{Q}} \tag{4.1.13}$$

式中，u_r 和 u_ϕ 分别表示沿着 r 方向和 ϕ 方向的位移分量；σ_{rr} 和 $\sigma_{\phi r}$ 分别表示正应力和剪切应力。将相应的位移及应力表达式带入式(4.1.13)得到系数 A_n、B_n、C_n 和 D_n 的方程组，方程组在 $ka<1$ 的情况下的解为

$$\left.\begin{aligned}
&A_0=\frac{1}{3}\left[1-\frac{3\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^2}{\frac{3\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^2-4\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}-1\right)}\right]\frac{(k_{\mathrm{L1}}a)^3}{k_{\mathrm{L1}}},\quad B_0=0\\
&A_1=\mathrm{i}\frac{\rho_1-\rho_2}{3\rho_1}\frac{(k_{\mathrm{L1}}a)^3}{k_{\mathrm{L1}}},\quad B_1=-\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^2A_1\\
&A_n=(-\mathrm{i})^n2^{2n}(4n^2-1)\frac{(n!)^2}{(2n!)^2}\\
&\times\frac{\frac{\mu_2}{\mu_1}-1}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}-1\right)+\frac{1}{n}\left[\frac{(n+1)\mu_2}{\mu_1}+\frac{2n^2+1}{2n-2}\right]\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^2}\frac{(k_{\mathrm{L1}}a)^{2n-1}}{k_{\mathrm{L1}}}\\
&B_n=-\frac{1}{n}\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^{n+1}A_n
\end{aligned}\right\} \tag{4.1.14}$$

(2) 空心球体，如工业检测中的气孔类缺陷，此类缺陷在表面上的应力为零，球坐标系下的边界条件可以表示为

$$\sigma_{rr}^{\mathrm{I}}+\sigma_{rr}^{\mathrm{S}}=0,\quad \sigma_{\phi r}^{\mathrm{I}}+\sigma_{\phi r}^{\mathrm{S}}=0 \tag{4.1.15}$$

同样，可以得到在 $ka\ll1$ 时系数表达式为

$$\left.\begin{aligned}
&A_0=\frac{1}{3}\left[1-\frac{3}{4}\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^2\right]\frac{(k_{\mathrm{L1}}a)^3}{k_{\mathrm{L1}}},\quad B_0=0\\
&A_1=\mathrm{i}\frac{1}{3}\frac{(k_{\mathrm{L1}}a)^3}{k_{\mathrm{L1}}},\quad B_1=-\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^2A_1\\
&A_n=(-\mathrm{i})^n(4n^2-1)\left(2^n\frac{n!}{2n!}\right)^2\frac{1}{1-\frac{2n^2+1}{2n(n-1)}\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^2}\frac{(k_{\mathrm{L1}}a)^{2n-1}}{k_{\mathrm{L1}}}\\
&B_n=-\frac{1}{n}\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^{n+1}A_n
\end{aligned}\right\} \tag{4.1.16}$$

(3) 刚性球体，表面上的位移为零，球坐标系下的边界条件为

$$u_r^{\mathrm{I}} + u_r^{\mathrm{S}} = u_r^{\mathrm{Q}}, \quad u_\phi^{\mathrm{I}} + u_\phi^{\mathrm{S}} = u_\phi^{\mathrm{Q}} \tag{4.1.17}$$

同样，可以得到在 $ka \ll 1$ 时系数表达式为

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{3}\frac{(k_{\mathrm{L1}}a)^3}{k_{\mathrm{L1}}}, \quad B_0 = 0 \\ A_1 &= -\mathrm{i}\frac{3}{k_{\mathrm{L1}}}\frac{1}{1+2\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^2}(k_{\mathrm{L1}}a), \quad B_1 = -\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^2 A_1 \\ A_n &= (-\mathrm{i})^n(4n^2-1)\left(2^n\frac{n!}{2n!}\right)^2\frac{1}{k_{\mathrm{L1}}}\frac{1}{1-\frac{n+1}{n}\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^2}(k_{\mathrm{L1}}a)^{2n-1} \\ B_n &= -\frac{1}{n}\left(\frac{k_{\mathrm{T1}}}{k_{\mathrm{L1}}}\right)^{n+1}A_n \end{aligned}\right\} \tag{4.1.18}$$

图 4.3 为计算的刚性球散射声场，其中图(a)、(b)、(c)为散射后总声场，图(d)、(e)、(f)为散射波声场，k_r 值分别取 1、4、10。可以看到，随着 k_r 值的增加，散射场越来越强。

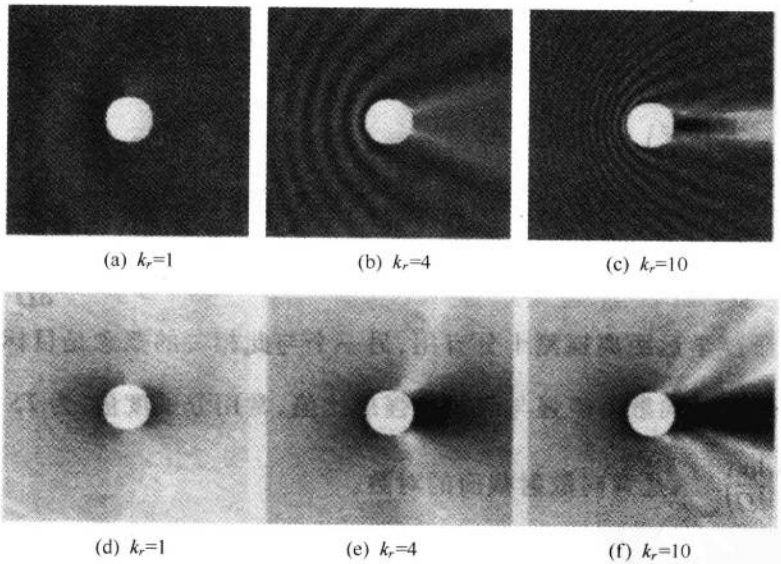


图 4.3 刚性球体的散射声场

4.1.3 平面边缘衍射[2]

对于平面型缺陷，主要考虑入射声场在平面上的反射和在平面边缘处的衍射，当入射波为简谐平面波时，平面反射问题较为简单，平面反射系数已在 2.1 节中给

出，下面主要考虑平面边缘衍射问题。

对于如图 4.4 所示的二维情况，一束平面波向 x 轴负方向传播，设 AO 为无限平面，AO 与 x 轴夹角为 ϕ_0，为了方便，假定 ϕ_0 为钝角，O 为边缘。当在 O 边缘发射衍射时，在 AOB 区域（$2\phi_0-\pi<\phi<\phi_0$）同时存在入射波和反射波，AOC 区域（$\phi_0<\phi<\pi$）为声线不可达区域，则在极坐标下，声压的表达式为

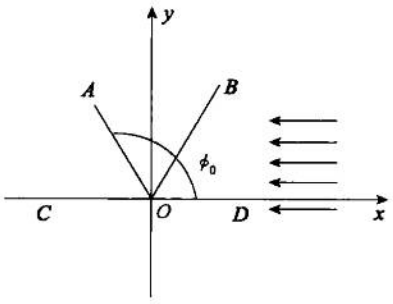


图 4.4　平面边缘衍射

$$P=\begin{cases}0, & \phi_0<\phi<\pi\\ \exp(-\mathrm{i}kr\cos\phi), & \phi<\pi \text{ 或 } \phi>2\phi_0-\pi\\ \exp(-\mathrm{i}kr\cos\phi)+\exp(-\mathrm{i}kr\cos(\phi-2\phi_0+\pi)), & 2\phi_0-\pi<\phi<\phi_0\end{cases} \tag{4.1.19}$$

在刚性平面边界上位移为零，则边界条件表达式为

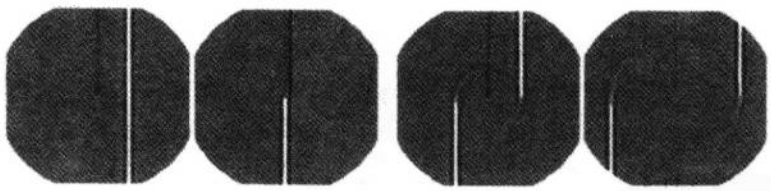
$$\frac{\partial P}{\partial\phi}\Big|_{\phi=\phi_0}=0 \tag{4.1.20}$$

将极坐标波动方程的解写成贝塞尔级数形式，并带入边界条件，经过数学变换处理，得到衍射声场为

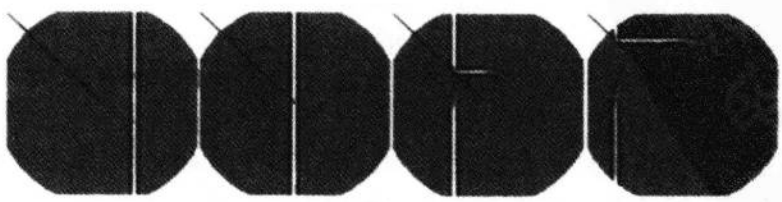
$$P(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\left[\cos\left(\frac{n\phi}{2}\right)+\cos\left(\frac{n}{2}(4\pi+2\phi_0-\phi)\right)\right]\mathrm{J}_{\frac{n}{2}}(kr) \tag{4.1.21}$$

当 $n=0$ 时，$\varepsilon_n=\varepsilon_0=0$；当 $n>0$ 时，$\varepsilon_n=1$；$\mathrm{J}_{\frac{n}{2}}(kr)$ 为贝塞尔函数。

图 4.5 分别是与入射方向成 90°和 45°的平面障碍物上的声束散射瞬态过程图，



(a) 入射方向为90°



(b) 入射方向为45°

图 4.5　脉冲波在平面边缘处的散射

可以看到，对于 90°平板，声束垂直入射，因此产生反向传播的反射波，同时在边缘产生衍射波，而对于 45°平板，开始只在边缘产生衍射，随后产生向上传播的反射波。

4.2 基于近似理论的散射模型[4~6]

4.1 节讨论的都是散射问题的解析解，而工程应用中，由于缺陷或结构的复杂性无法得到解析解，通过引入基尔霍夫近似、几何衍射理论和波恩近似等理论，建立散射模型，可以实现复杂缺陷和结构散射声场的快速计算。

4.2.1 基尔霍夫近似

基尔霍夫近似忽略沿缺陷表面传播的波，将散射场近似为缺陷上每个点的切平面的反射声场的叠加。

对于如图 4.6 所示的缺陷，s 为发射源，r' 为观察点，β 为入射角，θ 为观察角，当以入射场 $u^{\mathrm{I}}(r)$ 入射到缺陷时，声束入射到的表面称为亮区，记为 $S+$，声束无法到达的表面称为影区，记为 $S-$。观察点 r' 的位移场为入射场与散射场之和 $u^{\mathrm{T}}(r')=u^{\mathrm{I}}(r')+u^{\mathrm{S}}(r')$，由弹性定理的格林公式，散射场 $u^{\mathrm{S}}(r')$ 沿 p 方向的分量可以表示为

$$u_p^{\mathrm{S}}(r')=\int_{S+}[u_{\mathrm{I}}(r)]\sum_{ij}^{p}(r,r')n_j(r)\mathrm{d}^2r \tag{4.2.1}$$

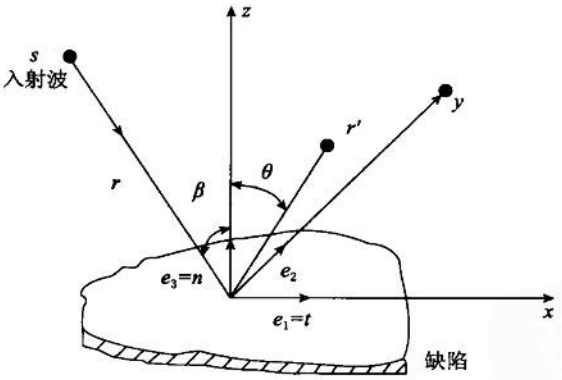


图 4.6 面缺陷散射示意图

式中，n_j 为 $S+$ 方向的外法线；$[u_{\mathrm{I}}(r)]$ 表示缺陷亮区面与影区面位移之差，即位移张开值(COD)；$\sum_{ij}^{p}(r,r')$ 表示点 r 处的发射源在点 r' 处产生的位移场的 p 方向的分量。由于入射场已知，只需要求得上述几项，即可得到观察点处的声场。

首先进行 COD 值 $[u_{\mathrm{I}}(r)]$ 的推导。COD 值主要通过分析质点偏振方向的位移来推导，对于如图 4.7 所示的 SV 横波入射，根据斯内尔定律，有

$$\sin\beta\tau = \sin\gamma \tag{4.2.2}$$

式中，$\tau=v_L/v_T$。根据基尔霍夫近似，在暗区和亮区的位移表达式为

$$\left.\begin{aligned} u(r') &= -u^I(r') && \text{在 } S- \text{上} \\ u^I &= U^I d^I \exp(\mathrm{i}Kxd^I) && \text{在 } S+ \text{上} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.3}$$

式中，d^I 为入射横波的质点偏振方向；K 为横波波矢；U 表示位移最大值，则反射位移场可以表示为

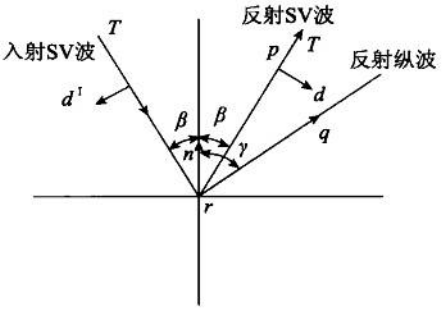


图 4.7　入射波反射示意图

$$\begin{aligned} u^R = U^I[&A_{ss}(\beta)\, d\exp(\mathrm{i}Kxd) \\ &+ A_{sp}(\beta)\, q\exp(\mathrm{i}Kxq)] \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

式中，横波反射系数 A_{ss} 和纵波反射系数 A_{sp} 分别为

$$\left.\begin{aligned} A_{ss}(\beta) &= \frac{\sin2\beta\sin2\gamma - \tau^2\cos^2 2\beta}{\sin2\beta\sin2\gamma + \tau^2\cos^2 2\beta} \\ A_{sp}(\beta) &= \frac{-\tau\sin4\beta}{\sin2\beta\sin2\gamma + \tau^2\cos^2 2\beta} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.5}$$

所以 COD 值$[u_I(r)]$可以表示为

$$\begin{aligned} [u_I(r)] &= u(r)\big|_{r\in S+} - u(r)\big|_{r\in S-} \\ &= U^I[A_{ss}(\beta)\, d\exp(\mathrm{i}Kxd) + A_{sp}(\beta) q\exp(\mathrm{i}Kxq) + d^I\exp(\mathrm{i}Kxd^I)] \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

式中，p、q 分别为反射纵波和反射横波的质点偏振方向。

根据偏振方向，SV 波引起的质点法向和切向振动位移分量分别为

$$\left.\begin{aligned} [u_n(r)] &= u_n^I(r)[1 + A_{ss}(\beta) - \tau\cot\gamma A_{sp}(\beta)] \\ [u_t(r)] &= u_t^I(r)[1 - A_{ss}(\beta) - \tau\tan\gamma A_{sp}(\beta)] \end{aligned}\right\} \tag{4.2.7}$$

同理，可以得到纵波引起的质点法向和切向振动位移分量分别为

$$\left.\begin{aligned} [u_n(r)] &= u_n^I(r)[1 + A_{pp}\beta + \tau^{-1}\tan\beta A_{ps}(\beta)] \\ [u_t(r)] &= u_t^I(r)[1 + A_{pp}\beta + \tau^{-1}\cot\delta A_{sp}(\beta)] \end{aligned}\right\} \tag{4.2.8}$$

此时的纵波反射系数分别为

$$\left.\begin{aligned} A_{pp}(\beta) &= \frac{\sin2\beta\sin2\delta - \tau^2\cos^2 2\delta}{\sin2\beta\sin2\delta + \tau^2\cos^2 2\delta} \\ A_{ps}(\beta) &= \frac{2\tau\sin2\beta\cos2\delta}{\sin2\beta\sin2\delta + \tau^2\cos^2 2\delta} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.9}$$

在得到 COD 值及其各个方向分量的显式表达式之后，下面将进行格林函数 $\sum_{ij}^{p}(r,r')$ 的推导：

$$4\Pi\sum_{ij}^{p}(r,r') = -\frac{2}{K}\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_j\partial x_p}(\Phi-\Psi)+\left(1-2\frac{k^2}{K^2}\right)\delta_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \delta_{ij}\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}+\delta_{jp}\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \tag{4.2.10}$$

式中，$\Phi=\frac{e^{ikR}}{R}$；$\Psi=\frac{e^{iKR}}{R}$；$R=|r-r'|\approx R_0-x_1\sin\theta-x_3\cos\theta$。对于纵波入射和纵波反射，将 COD 的各个分量带入式(4.2.10)，经过适当的代数变换得到

$$4\Pi\sum_{ij}^{p}(r,r') = -\left[\frac{k^2}{K^2}\cos^2\theta+\left(1-2\frac{k^2}{K^2}\right)\right]k^2\exp(ik(R_0-x_1\sin\theta-x_3\cos\theta)) \tag{4.2.11}$$

散射场的声势可以写为

$$\Phi^S(r') = \frac{1}{k^2}\int_{S+}[u_1(r)]\frac{\partial}{\partial x_p}\sum_{ij}^{p}(r,r')n_j(r)\mathrm{d}^2r \tag{4.2.12}$$

将式(4.2.8)和式(4.2.11)带入式(4.2.12)，得到散射场的表达式为

$$\Phi_{pp}^S = -\frac{e^{ikR_0}}{\lambda_p R_0}B_{pp}(\beta,\theta)\int_{S+}\exp(ikx_1(\sin\beta-\sin\theta))\mathrm{d}^2r \tag{4.2.13}$$

式中，λ_p 为纵波波长；$B_{pp}(\beta,\theta)$为散射系数，其表达式为

$$B_{pp}(\beta,\theta) = -\frac{1}{2\tau^2}[\sin\beta\sin2\theta A_{pt}(\beta)+\cos\beta(2\sin^2\theta-\tau^2)A_{pn}(\beta)] \tag{4.2.14}$$

$$A_{pn}(\beta) = [1-A_{pp}(\beta)+\tau\cot\gamma A_{ps}(\beta)]$$

$$A_{pt}(\beta) = [1+A_{pp}(\beta)+\tau\tan\delta A_{ps}(\beta)]$$

同理，纵波入射横波散射、横波入射纵波散射和横波入射横波散射的散射场和散射系数分别为

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{ps}^S &= -\frac{e^{ikR_0}}{\lambda_p R_0}B_{ps}(\beta,\theta)\int_{S+}\exp(ix_1(k\sin\beta-K\sin\theta))\mathrm{d}^2r\\ B_{ps}(\beta,\theta) &= \frac{i}{2\tau^2}[\sin\beta\sin2\theta A_{pt}(\beta)+\cos\beta\sin2\theta A_{pn}(\beta)]\end{aligned}\right\} \tag{4.2.15}$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{ss}^S &= -\frac{e^{ikR_0}}{\lambda_p R_0}B_{ss}(\beta,\theta)\int_{S+}\exp(iKx_1(\sin\beta-\sin\theta))\mathrm{d}^2r\\ B_{ss}(\beta,\theta) &= \frac{i}{2}[\cos\beta\cos2\theta A_{st}(\beta)-\sin\beta\sin2\theta A_{sn}(\beta)]\end{aligned}\right\} \tag{4.2.16}$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{sp}^S &= -\frac{e^{ikR_0}}{\lambda_p R_0}B_{sp}(\beta,\theta)\int_{S+}\exp(ix_1(K\sin\beta-k\sin\theta))\mathrm{d}^2r\\ B_{sp}(\beta,\theta) &= \frac{i}{2\tau}[\cos\beta\sin2\theta A_{st}(\beta)-\sin\beta(2\sin^2\theta-\tau^2)A_{sn}(\beta)]\end{aligned}\right\} \tag{4.2.17}$$

式中 $B_{ps}(\beta,\theta)$为纵波入射时的横波散射系数；$B_{ss}(\beta,\theta)$为横波入射时的横波散射系数；$B_{sp}(\beta,\theta)$为横波入射时的纵波散射系数；$A_{sn}(\beta)=[1+A_{ss}(\beta)-\tau\cot\gamma A_{sp}(\beta)]$，

$A_{st}(\beta)=[1-A_{ss}(\beta)-\tau\tan\gamma A_{sp}(\beta)]$。

基于基尔霍夫近似的散射模型可以用于计算超声检测中各种缺陷和结构的散射回波。图 4.8 为直角坐标系中放置一钢工件，平面形裂纹和横孔深度为 40mm，即缺陷中心坐标为(0,0,−40)，设探头初始位置坐标为(−50,0,12.5)，然后从 $x=-50$ 开始沿 x 轴进行扫描，扫描距离 100mm，耦合介质为水，厚度为 12.5mm。纵波入射，不考虑波形转换和底面回波。直探头直径为 Φ14mm，频率为 2MHz，图 4.8(a)中面缺陷尺寸 4mm×4mm，图 4.8(b)中横孔直径为 Φ2×10mm。计算流程图如图 4.9 所示，计算程序见附录 3。计算得到的面缺陷和横孔的 B 显图像、A 显信号及回波动态曲线如图 4.10 所示。

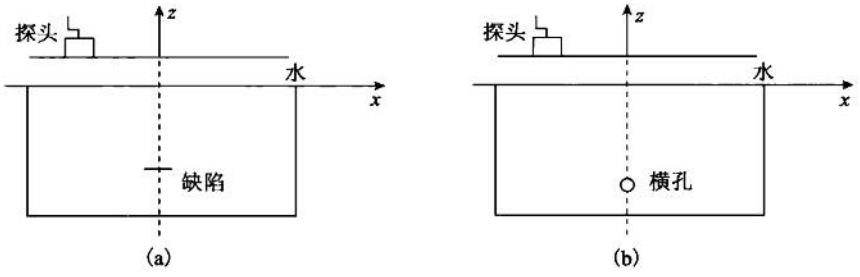


图 4.8　缺陷示意图

4.2.2　波恩近似[7~10]

假设一束从无穷远处沿 z 轴方向行进的平面波入射到缺陷，如图 4.11 所示。缺陷用空间 R 和表面 S 表示。当入射波到达缺陷表面时，会产生沿各个方向传播的散射波。入射波角频率为 ω。坐标原点位于缺陷中心点。主介质密度为 ρ，弹性常数为 C_{ijkl}；缺陷密度为 ρ'，弹性常数为 C'_{ijkl}。显然，对于气孔来说，$\rho'=C'_{ijkl}=0$。

应用格林函数和高斯定理，散射后位移场可以表示为

$$u_m^S=C_{ijkl}\int_S \mathrm{d}Sn_j(g_{im}u_{k,jl}-u_ig_{km,l})+\int_R \mathrm{d}Vf_ig_{im} \tag{4.2.18}$$

式中，u_m^S 的 m 表示散射方向；C_{ijkl} 的下脚标 $ijkl$ 为爱因斯坦求和约定中的下脚标；$\mathrm{d}S$ 为缺陷表面积微元；$\mathrm{d}V$ 为缺陷体积微元；n_j 是表面 S 外法线方向的单位矢量；g 为格林函数。在表面 S 上的点满足边界条件。u^I 是入射波，角频率为 ω。最终，式(4.2.18)可以写为

$$u_m^S=u_m^I+\int_R \mathrm{d}Vf_ig_{im} \tag{4.2.19}$$

式(4.2.19)为缺陷的散射波的表达式，与缺陷的材料特性、弹性常数以及密度有关。一般来说，这些参数又会随着位置变化。将缺陷的弹性常数和密度记为 $C'_{ijkl}(r)$ 和 $\rho'(r)$，用下面的形式表示

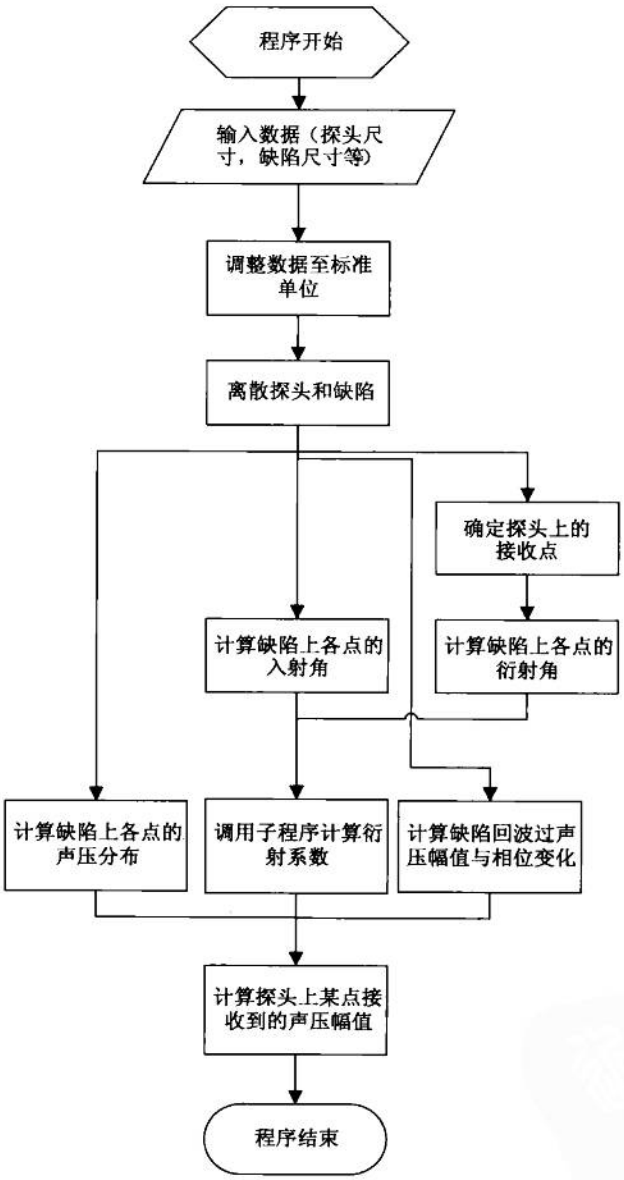


图 4.9 计算流程图

$$C'_{ijkl}(r) = C_{ijkl} + \delta C_{ijkl}\theta(r) \tag{4.2.20}$$

$$\rho'(r) = \rho + \delta\rho\theta(r) \tag{4.2.21}$$

式中

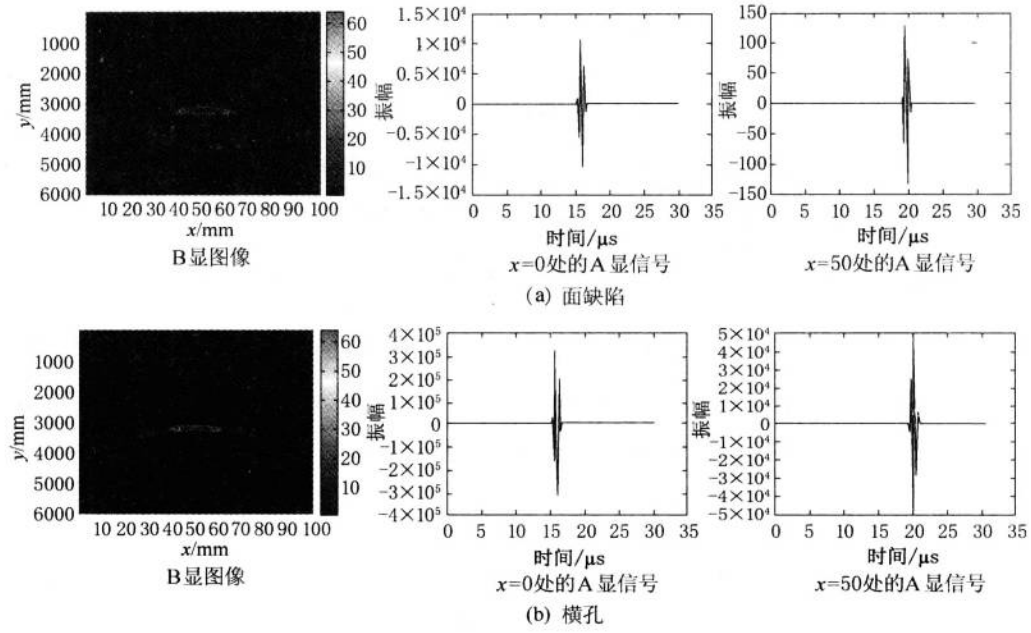


图 4.10　缺陷回波图

$$\delta C_{ijkl} = C'_{ijkl} - C_{ijkl} \tag{4.2.22}$$

$$\delta\rho = \rho' - \rho \tag{4.2.23}$$

当 r 在 R_2 时，$\theta(r)=1$，当 r 不在 R_2 内时，$\theta(r)=0$，R_2 表示缺陷区域，如图 4.12 所示。将格林定理运用于体积的二次积分，可以得到

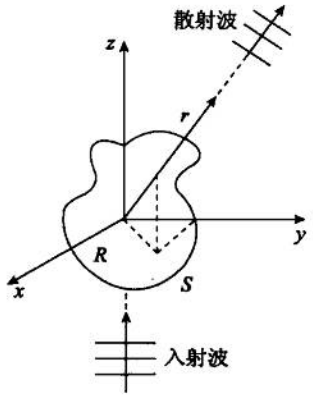


图 4.11　夹渣缺陷散射示意图

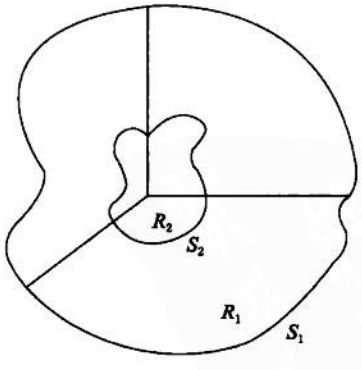


图 4.12　缺陷和介质示意图
缺陷为区域 R_2，边界为 S_2，
介质区域为 R_1，边界为 S_1

$$u_m^S(r) = u_m^I(r') + \delta\rho\omega^2\int_{R_2} \mathrm{d}V g_{im}(r-r')u_i(r) - \delta C_{ijkl}\int_{S_2} \mathrm{d}V g_{im,j}(r-r')u_{k,l}(r) \tag{4.2.24}$$

当考虑远场区域时，即 $R\to\infty$ 时，有 $g_{im}(r,r') = g_{im}(r-r')$，即 $g_{im,j} = -g_{im,j'}$。经过适当的数学变形后，得到散射后总位移场的基本方程为

$$u_m^S(r) = u_i^I(r) + \delta\rho\omega^2\int_{R_2} \mathrm{d}V g_{im}(r-r')u_m(r') + \delta C_{jklm}\int_{R_2} \mathrm{d}V' g_{ij,k}(r-r')u_{l,m'}(r') \tag{4.2.25}$$

式中，第二项为散射场，可以通过对格林函数取近似值来得到解析式。假定介质为无穷大区域时，对格林函数做近似处理，在考虑远场区域，即 $r\to\infty$ 时，散射场 u_i^S 的远场可以表示为

$$u_i^S = \hat{r}_i\hat{r}_f f_j(\alpha)\frac{\exp(\mathrm{i}\alpha r)}{r} + (\delta_{ij} - \hat{r}_i\hat{r}_f)f_j(\beta)\frac{\exp(\mathrm{i}\beta r)}{r} \tag{4.2.26}$$

式中

$$f_j(k) = \frac{k^2}{4\pi\rho\omega^2}\left[\delta\rho\omega^2\int_{R_2} \mathrm{d}V' u_i\exp(-\mathrm{i}kr') + \mathrm{i}k\hat{r}_j\delta C_{ijkl}\int_{R_2} \mathrm{d}V'\varepsilon_{kl}\exp(-\mathrm{i}kr')\right] \tag{4.2.27}$$

$\hat{r}_i$、$\hat{r}_f$ 分别表示沿着 i 和 f 方向的单位矢量；ε_{kl} 为应变量，$\varepsilon_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k})/2$。

式(4.2.26)右边的第一项表示散射后的纵波场，第二项表示散射后的横波场，将它们分别用下面的式子表示：

$$\begin{aligned} A_i(\theta,\varphi) &= \hat{r}_i\hat{r}_f f_j(\alpha) \\ B_i(\theta,\varphi) &= (\delta_{ij} - \hat{r}_i\hat{r}_f)f_j(\beta) \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

式中，θ、φ 分别为入射角和散射角。散射振幅可以写为如下形式

$$u_i^S = A_i\frac{\exp(\mathrm{i}\alpha r)}{r} + B_i\frac{\exp(\mathrm{i}\beta r)}{r} \tag{4.2.29}$$

从式(4.2.29)可以看出，单色波入射时，散射波为两个向外传播的球面波。只要求得 $f_j(k)$，便可求得散射场振幅。但是缺陷内部的场未知，即式(4.2.27)有未知项，使得振幅的求解困难，因此需要做近似处理。波恩近似即将缺陷内部的场近似为入射场。对不同入射波的情况，可以分别求出振幅的显形表达式。

当入射波为纵波时，设入射波表达式为 $u_i^I = \hat{a}_i\exp(\mathrm{i}\alpha z)$，则可以求得其 f 矢量为

$$f_i(\hat{\gamma r}) = \frac{\gamma^2}{4\pi\rho\omega^2}[(\delta\rho\omega^2 - 2\alpha\gamma\delta\mu\cos\theta)\hat{a}_i - \alpha\gamma\delta\lambda\hat{r}_i]S(\alpha,\gamma) \quad (4.2.30)$$

式中，γ 为纵波或者横波波矢。将式(4.2.30)代入式(4.2.28)，得到纵波散射场和横波散射场的振幅表达式

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \frac{\alpha^2}{4\pi}\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\cos\theta - \frac{\delta\lambda + 2\delta\mu\cos^2\theta}{\lambda + 2\mu}\right)S(\alpha,\alpha)\hat{r}_i \\ B_i &= \frac{\beta^2}{4\pi}\left(\frac{\alpha\delta\mu}{\beta\mu}\sin 2\theta - \frac{\delta\rho}{\rho}\right)S(\alpha,\beta)\hat{\theta}_i \end{aligned}\right\} \quad (4.2.31)$$

当入射波为横波时，设入射波表达式为 $u_i^{\mathrm{I}} = \hat{b}_i\exp(\mathrm{i}\beta z)$，同样可以求得其 f 矢量为

$$f_i(\hat{\gamma r}) = \frac{\gamma^2}{4\pi\rho\omega^2}[(\delta\rho\omega^2 - \beta\gamma\delta\mu\cos\theta)\hat{b}_i - \beta\gamma\delta\mu\hat{r}_i\hat{b}_i\delta_{i,3}]S(\beta,\gamma) \quad (4.2.32)$$

将式(4.2.32)带入式(4.2.28)得到纵波散射场和横波散射场的振幅表达式

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \frac{\alpha^2}{4\pi}\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\sin\theta\cos\varphi - \frac{\delta\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\beta}{\alpha}\sin 2\theta\cos\varphi\right)S(\beta,\alpha)\hat{r}_i \\ B_i &= \frac{\beta^2}{4\pi}\left[\left(-\frac{\delta\rho}{\rho}\sin\varphi + \frac{\delta\mu}{\mu}\cos\theta\sin\varphi\right)\hat{\varphi}_i + \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\cos\theta\cos\varphi - \frac{\delta\mu}{\mu}\cos 2\theta\cos\varphi\right)\hat{\theta}_i\right]S(\beta,\beta) \end{aligned}\right\} \quad (4.2.33)$$

式中，$\hat{\theta}_i$ 表示沿着角度 θ 方向的单位矢量。

为了准确预测超声波在夹渣的前后两个面上散射的时间差，常常采用修正后的波恩近似模型，即在 f 矢量的表达式中，用夹渣的波矢代替介质的波矢。此模型也考虑了夹渣和介质在密度和波速上的差别。对于不同入射波形，纵波散射场和横波散射场的振幅表达式分别为

(1) 纵波入射：

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \frac{\alpha'^2}{4\pi}\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\cos\theta - \frac{\alpha}{\alpha'}\frac{\delta\lambda + 2\delta\mu\cos^2\theta}{\lambda + 2\mu}\right)S(\alpha,\alpha')\hat{r}_i \\ B_i &= \frac{\beta'^2}{4\pi}\left(\frac{\alpha\delta\mu}{\beta'\mu}\sin 2\theta - \frac{\delta\rho}{\rho}\right)S(\alpha,\beta')\hat{\theta}_i \end{aligned}\right\} \quad (4.2.34)$$

(2) 横波入射：

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \frac{\alpha'^2}{4\pi}\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\sin\theta\cos\varphi - \frac{\delta\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\beta}{\alpha'}\sin 2\theta\cos\varphi\right)S(\beta,\alpha')\hat{r}_i \\ B_i &= \frac{\beta'^2}{4\pi}\left[\left(-\frac{\delta\rho}{\rho}\sin\varphi + \frac{\delta\mu}{\mu}\frac{\beta}{\beta'}\cos\theta\sin\varphi\right)\hat{\varphi}_i\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\cos\theta\cos\varphi - \frac{\delta\mu}{\mu}\frac{\beta}{\beta'}\cos 2\theta\cos\varphi\right)\hat{\theta}_i\right]S(\beta,\beta') \end{aligned}\right\} \quad (4.2.35)$$

式中，$S(\alpha,\alpha')$ 为形状因子。对任意形状的夹渣有

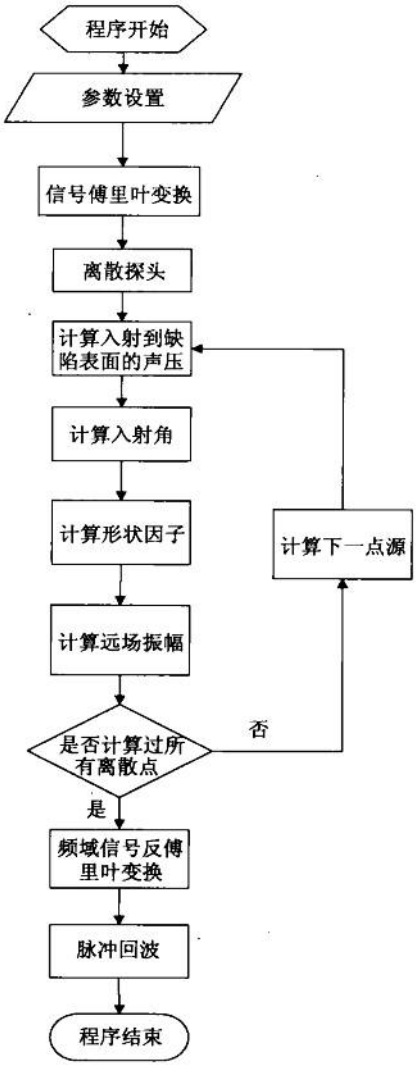


图 4.13 计算流程图

$$S(p,q)=\int_R \mathrm{d}V' \exp(\mathrm{i}(p\hat{z}-q\hat{r})r') \tag{4.2.36}$$

式中，p 和 q 分别代表入射波和散射波的波矢；r 为散射波传播方向。定义 $p\hat{z}-q\hat{r}=\Delta k$，对球形、圆柱形和椭球形夹渣，形状因子的表达式可以简化。

(1) 半径为 a 的球形夹渣

$$S=4\pi a^3\frac{\sin(a\Delta k)-a\Delta k\cos(a\Delta k)}{(a\Delta k)^3} \tag{4.2.37}$$

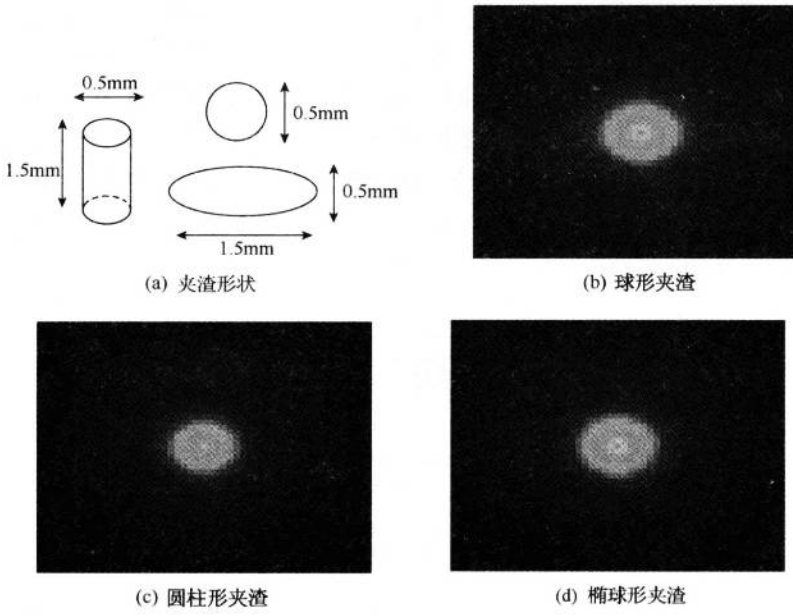
(2) 半径为 b，高度为 $2a$，轴线沿 z 轴方向的圆柱体夹渣

$$S=4\pi ab^2\frac{\sin(a\Delta k_z)}{a(\Delta k)_z}\frac{\mathrm{J}_1(b(\Delta k)_x)}{b(\Delta k)_x} \tag{4.2.38}$$

(3) x、y、z 轴上截距分别为 a、b、c 的椭球形夹渣

$$S=4\pi abc(\sin\Delta k-\Delta k\cos\Delta k)(\Delta k^3)^{-1} \tag{4.2.39}$$

基于波恩近似理论建立的模型都是用显式表达，而且不需要对缺陷进行网格划分，极易实现编程计算，计算流程如图 4.13 所示，程序见附录 4。图 4.14 为球形、圆柱形和椭球形夹渣缺陷的散射声场的计算模型应用，探头晶片尺寸为 4mm×4mm，频率为 2MHz；夹渣材质为铝，深度为 30mm 介质材质为钛，球形夹渣直径为 Φ0.5mm，圆柱形夹渣直径为 Φ0.5mm，长度为 1.5mm，椭球形夹渣三个轴向长度分布为 0.5mm、0.5mm、1.5mm，如图 4.14(a)所示。计算得到球形、圆柱形和椭球形夹渣缺陷的 C 扫图像如图 4.14(b)～图 4.14(d)所示。



(a) 夹渣形状　(b) 球形夹渣

(c) 圆柱形夹渣　(d) 椭球形夹渣

图 4.14　不同形状夹渣 C 扫图

4.3　散射问题的数值解

数值法在处理缺陷散射问题时的步骤与处理声场发射问题相似，其中缺陷表面的网格划分和边界条件是计算缺陷散射问题的关键，缺陷表面与工件表面都近似为自由面。

4.3.1　有限差分法[11,17]

有限差分法(FDM)将缺陷周围弹性材料的偏微分运动控制方程近似为时域方程，并利用差分方程代替这些方程，然后利用数值法解差分方程，得到定义在网格离散点上的质点振动的时间函数。从理论上讲，FDM 可以解决一般性问题，但该方法固有的特性限制了其应用。首先，FDM 利用矩形网格对介质进行网格划分，对于形状较为复杂的缺陷，这种矩形网格划分不能满足缺陷边界条件。其次，缺陷周向的全部区域都要进行网格划分，为了减小计算量，设置人工截断边界来对部分介质进行网格划分，这样会导致假想边界，在假想边界上会产生额外的反射波。为了抑制这些额外的波，必须加一些吸收边界条件或者让缺陷远离假想边界。最后，由网格划分导致的计算量大，特别是对于三维散射问题，这也是所有数值方法都存在的问题，因此目前 FDM 都是用二维模型。

现用二维 FDM 方法进行相控阵检测管道切槽的回波计算，管道及切槽结构如图 4.15 所示，切槽位于管道内壁，尺寸 5mm。管道壁厚为 10mm，材质为低碳钢。相控阵探头频率为 5MHz，64 晶片，孔径为 46mm，晶片宽度为 15mm。入射信号为三周期汉宁窗脉冲信号。在离散网格时，取单元尺寸为 8.4×10^{-2}mm($\lambda/15$)，时间步长为 9.43ns。为了减少计算量，在管道两个界面上施加人工截断边界，然后施加吸收边界条件，即在最外层增加一个完全匹配的阻尼层，当声波穿过该层时，迅速减小，这也只会有一小部分反射波出现。

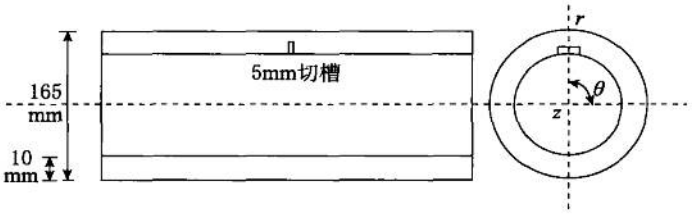
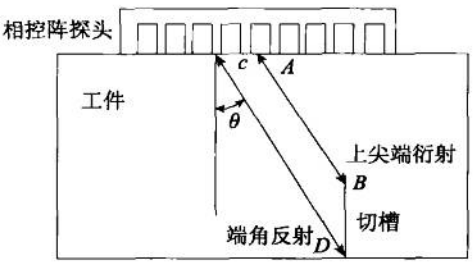


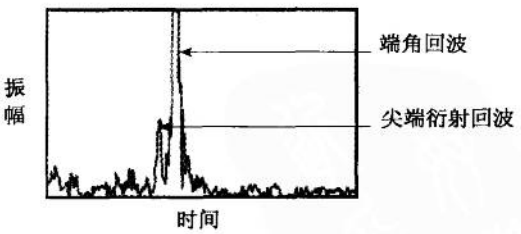
图 4.15 管道几何结构示意图

图 4.16(a)为声束传播路径图，可以看到，声束直接入射到切槽尖端 B，并产生尖端衍射信号，声束会入射到端角 D 处，产生端角回波信号，并且会发射波形转换。图 4.16(b)为 5mm 切槽在声束入射角度为 45°时的 A 扫描信号，可以明显地看到两个波峰，分别为端角回波信号和尖端衍射信号，利用两个波峰之间的间距并结合介质声速，可以对切槽长度进行定量。

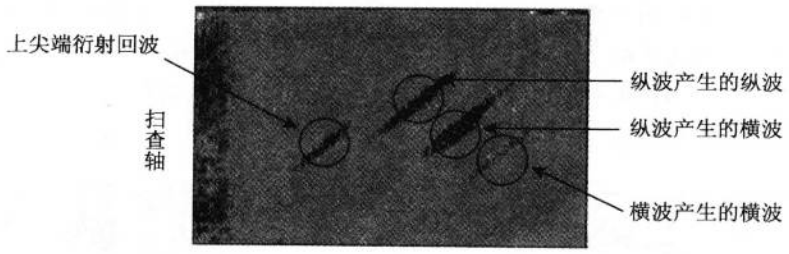
图 4.16(c)为 5mm 切槽在声束入射角度为 45°时的 B 扫描图像，可以看到，图像中出现四个回波，尖端衍射信号，端角直接反射的纵波信号及端角波形转换产生的两个横波信号。



(a) 声束路径



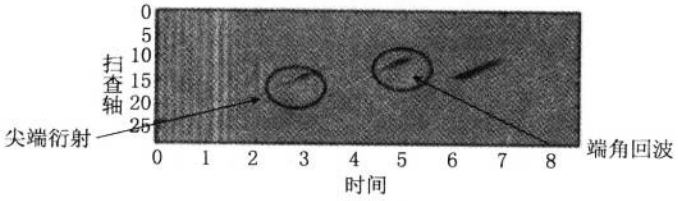
(b) A型显示信号



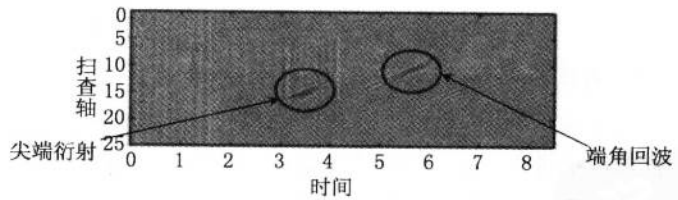
(c) B型显示图像

图 4.16　相控阵检测声束路径和切槽回波图

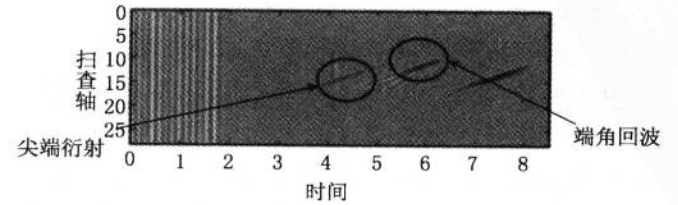
利用尖端反射信号和端角回波信号波峰之间的间距对切槽进行定量的前提是两个信号在时间上必须分开，两个信号的间距与检测声束入射角度有关。下面分别选择不同入射角，观察两个信号间距的变化。图 4.17 入射角为 35°、45°和 55°得到的 5mm 切槽 B 扫描图像。可以看到，当入射角度减小时，裂纹尖端衍射波和端角回波的间距增大，当达到 35°和 45°时，间距已经足够将两个波分开。这种分开对检测小缺陷非常有帮助，对于纵波检测小缺陷，推荐角度使用 35°。



(a) 35°



(b) 45°



(c) 55°

图 4.17　不同入射角对回波图像的影响

利用不同倾斜角切槽的 B 扫描图像的差别，可以评定切槽倾角。图 4.18 给出了不同倾斜角切槽的 B 扫描图，切槽倾斜角是为±15°和 0°，高度为 5mm，声束入射角 45°。可以看到，与垂直于管道轴线的切槽相比，倾斜角为+15°的切槽得到的尖端衍射回波信号偏左，而倾斜角为−15°的切槽得到的信号偏右。

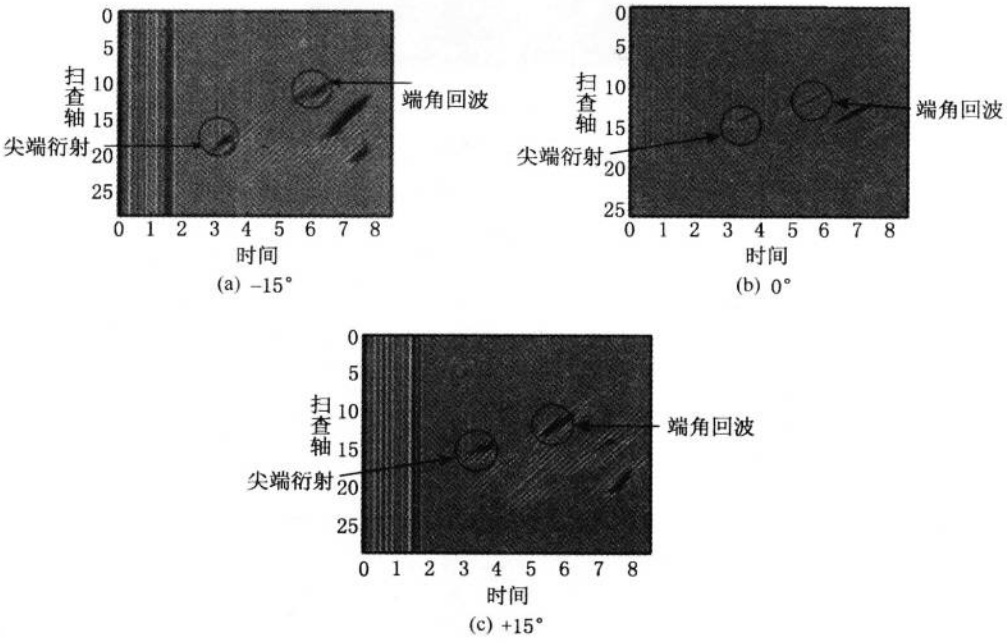


图 4.18 切槽倾角对回波图像的影响

4.3.2 有限元法[12,13,16,17]

与 FDM 相似，有限元法(FEM)也是通过离散网格来求缺陷解散问题的，但是两者在原理和方法上有一定的差别。首先，FEM 不是直接近似运动方程，而是将运动方程用组装矩阵的能量函数最小值代替，组装矩阵的每个元素都简化为材料参数的简单多项式函数，然后数值方法求解得到庞大的带状方程组。这使得 FEM 可用于模拟非均质和各向异性介质等复杂材质。其次，与 FDM 的矩形网格划分不同，FEM 采用任意形状的单元进行网格划分，因而可以处理任意形状的缺陷。FEM 也要引入假想边界，需要施加吸收边界条件来抑制假想边界上额外反射波。为了保持计算精度，网格尺寸一般为波长的 1/5～1/10，而大多数 NDE 的应用范围都是高频，即波长非常小，这样网格尺寸就更小，从而导致有限元法的计算量很大，这是 FEM 方法的最大问题。为了减少计算量同时保留 FEM 方法的优势，可以将半解析法与 FEM 结合使用，只对缺陷周围较小的部分进行网格划分，其他区

域的声场采用半解析法计算。

对于如图 4.19 所示的两种状态，状态 1 不存在缺陷，状态 2 存在缺陷，现假设一个将缺陷包围的假想声单元，则状态 1 和状态 2 可以看成是对包含缺陷和不包含缺陷的两个声单元进行检测。声单元之外利用半解析法算声场，声单元之内进行 FEM 网格划分，网格单元可以用最常规的矩形单元，如图 4.20 所示。

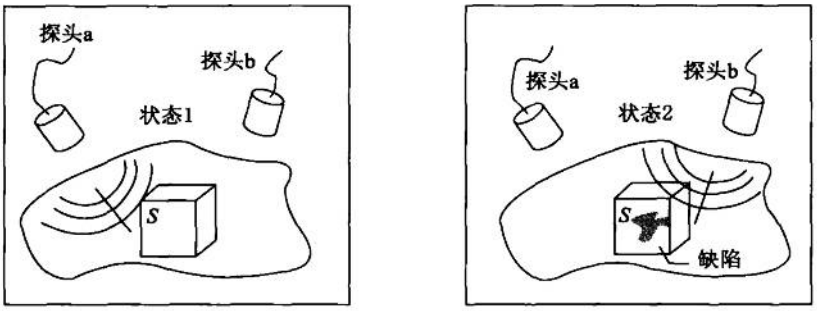


图 4.19　互易原则状态定义(有缺陷和没缺陷)

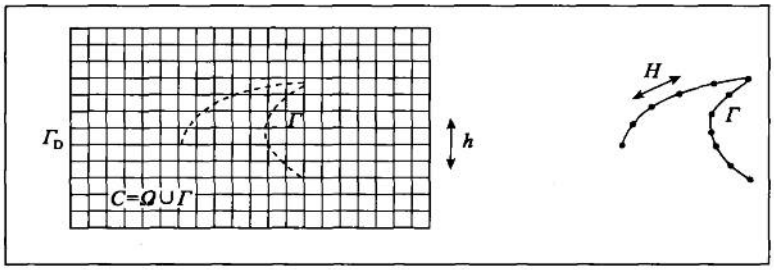


图 4.20　有限元网格划分

h 为介质的网格尺寸，H 为缺陷的网格尺寸

接下来的最为重要的是寻找一个可以实现半解析法和有限元法数据交换的耦合方程。基于 Auld 互易原则，两种检测状态的透射系数的差值 $\delta\Gamma$ 可以用表面积分形式表示：

$$\delta\Gamma P = \frac{1}{4}\iint_S (v_i^{(1)}\sigma_{ij}^{(2)} - v_i^{(2)}\sigma_{ij}^{(1)})n_j \mathrm{d}S \tag{4.3.1}$$

式中，v_i 为质点速度；σ_{ij} 为应力矢量；$n_j\mathrm{d}S$ 为表面矢量；S 为缺陷表面；P 为探头发射功率；上标(1)和(2)表示检测状态。

方程(4.3.1)假设探头发射源为连续波，为了模拟宽带探头，必须得到 $\delta\Gamma$ 和 P 的时域表达式。首先假设状态 1 和状态 2 的检测时间分别为 $t_1=\tau, t_2=t-\tau$，对 τ 积分，得到

$$\delta\Gamma(t) * P(t) = \frac{1}{4}\int\iint_S [v_i^{(1)}(\tau)\sigma_{ij}^{(2)}(t-\tau) - v_i^{(2)}(t-\tau)\sigma_{ij}^{(1)}(\tau)]n_j \mathrm{d}S\mathrm{d}\tau \tag{4.3.2}$$

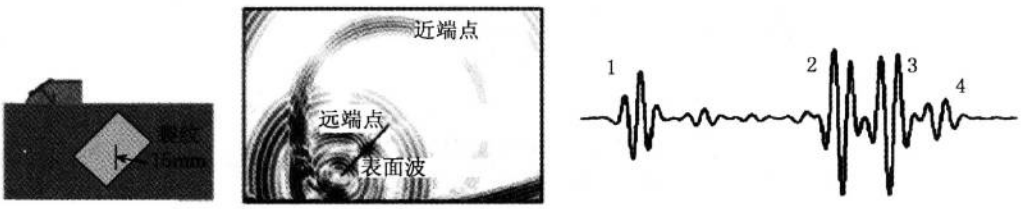
为了得到 $\delta\Gamma(t)$的表达式，可以对式(4.3.2)进行反卷积处理，这样表达式中会出现脉冲响应

$$\delta\Gamma(t) = \frac{1}{4}\iint_S [hv_i^{(1)}(t) * \sigma_{ij}^{(2)}(t) - v_i^{(2)}(t)H\sigma_{ij}^{(1)}(t)]n_j \mathrm{d}S \tag{4.3.3}$$

式(4.3.3)即缺陷的脉冲响应表达式，式中脉冲响应 $hv_i^{(1)}$ 和 $H\sigma_{ij}^{(1)}$可以利用半解析法计算。

在求解过程中需要综合考虑声单元的尺寸，为了减小计算量，声单元的尺寸越小越好，但要保证声束从单元表面到达缺陷的时间大于一个脉冲激励时间。为了避免表面反射和衍射波的出现，必须在声单元各个表面施加吸收边界条件。

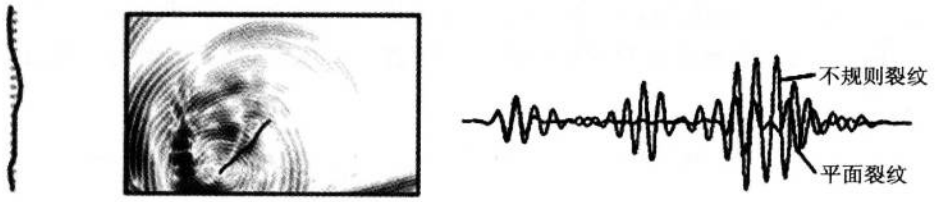
现用混合模型进行垂直于工件表面的裂纹回波计算，裂纹位置如图 4.21(a)所示，高度为 15mm，检测声束为 45°横波，探头频率为 2MHz。得到的计算结果如图 4.21(b)和 4.21(c)所示。从图 4.21(c)的 A 扫信号图可以看到，存在 4 个主要回波，其中回波 1 为近尖端衍射回波，回波 2 为远尖端衍射回波，其他两个回波由瑞利波引起，回波 3 为尖端产生的瑞利波沿着裂纹表面传播，然后在另一尖端转换为体波得到，回波 4 为瑞利波在另一尖端未转换为体波的部分反射后，再次沿裂纹表面传播得到。图 4.21(b)给出了声单元内部衍射波的瞬态图。



(a) 检测结构图　(b) 假想域内瞬态声场　(c) 探头接收信号

图 4.21　垂直裂纹计算

有限元法的优势之一是可以处理不规则形状的缺陷，利用混合计算不规则裂纹得到的结果如图 4.22 所示。图 4.22(c)为平面裂纹和不规则裂纹 A 扫信号的对比，可以看到两种缺陷近尖端衍射幅值几乎相同，而对于远尖端，不规则裂纹衍射信号幅值高于平面裂纹。从图 4.22(b)可以看到，不规则裂纹的远端衍射信号与沿表面传播的瑞利波无法区分，而且一个回波可能产生两个衍射信号。



(a) 不规则裂纹　　(b) 假想域内瞬态声场　　(c) 探头接收信号对比

图 4.22　不规则裂纹计算

4.3.3　边界元法[14,16,17]

边界元法(BEM)是一种比较好的用于模拟缺陷散射问题的方法，利用固体中波动方程的基本解得到缺陷表面的位移场和应力场的积分方程，然后通过将缺陷表面划分成小单元，并将每个单元用简单式得到方程组来求解积分方程，进而计算缺陷散射波和远场散射振幅。由于边界元只处理缺陷表面的场，无需考虑假想边界。和 FEM 一样，BEM 也存在波长小导致计算量大的问题。如何利用基本解产生需要的积分方程是 BEM 关键，只有各向同性介质的基本解可以解析表示，而各向异性介质的基本解为积分形式，需要进行数值计算。

针对介质及缺陷的不同特点，往往需要选取特定的 BEM 方法和基本解形式，现用二维时域 BEM 方法计算各向异性介质中裂纹的散射声场。假设无限大各向异性介质存在一裂纹类缺陷，一声束从远处传播过来到达裂纹表面如图 4.23 所示，位移分量的波动方程可以表示为

$$(C_{\alpha j\beta}\partial_\alpha\partial_\beta - \rho\delta_{ij}\partial_t)u_j(x,t) = 0 \tag{4.3.4}$$

式中，$C_{\alpha j\beta}$ 表示克里斯托夫矢量；∂_α 和 ∂_β 偏导数符号；u_j 为位移分量。初始条件为

$$u_i(x,t) = \dot{u}_i(x,t) = 0, \qquad t = 0 \tag{4.3.5}$$

式中，下脚 i 表示位移分量方向。

裂纹表面的自由边界条件，即应力 $t_i(x,t)$ 为零，写为

$$t_i(x,t) = \sigma_{i\beta}(x,t)e_\beta(x) = 0, \qquad x \in T_c \tag{4.3.6}$$

式中，$T_c = T_c^+ + T_c^-$，T_c^+ 和 T_c^- 分别代表裂纹的上下表面，如图 4.23 所示。

利用 Betti-Rayleigh 互易原理，位移场分量可以用时域边界积分方程表示：

$$u(y,t) = u^I(y,t) - \int_{T_c^+} h_i(x,y,t) * \Delta u_i(x,t)\mathrm{d}s_x, \qquad y \notin T_c^+ \tag{4.3.7}$$

式中，x 和 y 分别表示源点和观察点；$u^I(y,t)$ 为入射波；$h_i(x,y,t)$ 为时域弹性应力基本解；

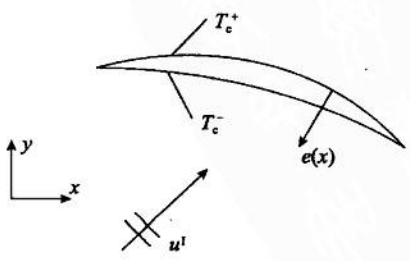


图 4.23　裂纹散射示意图

$\Delta u_i(x,t)$为裂纹张开值(COD)。将式(4.3.6)带入胡克定律，求 $y\to T_c^+$ 的极限情况，并将应力基本解的高阶项展开为奇异稳态项和常规动态项，得到时域边界积分方程为

$$f.p.\int_{T_c^+} w_{ij}^{s}(x,y)\Delta u_i(x,t)\mathrm{d}s_x+\int_{T_c^+} w_{ij}^{d}(x,y,t)*\Delta\ddot{u}_i(x,t)\mathrm{d}s_x$$
$$=t_j^i(y,t),\qquad y\in T_c^+ \tag{4.3.8}$$

式中，$f.p.$ 表示阿达马有限项积分；$w_{ij}^{s}(x,y)$和 $w_{ij}^{d}(x,y,t)$分布表示应力基本解的高阶项 $w_{ij}(x,y,t)$展开的奇异稳态项和常规动态项。

为求解时域边界积分方程(4.3.8)，可以在时间上采用搭配法离散，在空间上采用迦辽金法离散。首先，未知的 COD 值 $\Delta u_i(x,t)$可以近似为插值函数：

$$\Delta u_i(x,t)=\sum_{q=1}^{Q}\sum_{n=1}^{N}\varphi_u^n(x)\varphi_u^q(t)(\Delta u_i)^{nq} \tag{4.3.9}$$

式中，n 表示节点编号；q 表示时间步编号；Q 表示总时间步数；N 表示总结点数；$\varphi_u^n(x)$和 $\varphi_u^q(t)$分别为空间和时间形状函数。

引入线性形状函数

$$\varphi_u^q(t)=\frac{1}{\Delta t}\{[t-(q-1)\Delta t]H[t-(q-1)\Delta t]-2(t-q\Delta t)H(t-q\Delta t)$$
$$+[t-(q+1)\Delta t]H[t-(q+1)\Delta t]\} \tag{4.3.10}$$

式中，H 为赫维赛德函数。将式(4.3.8)两边乘以 $\varphi_u^n(x)$，对 $\mathrm{d}s_y$ 积分，然后带入应力基本解的高阶稳态项 $w_{ij}^{s}(x,y)$，得到

$$\int_{T_c^+}\frac{\partial\varphi_u^m(y)}{\partial s_y}\mathrm{d}\partial s_y\int_{T_c^+}\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}B_{ij}^{l}(\eta_l)\lg(d_l(x-y))\frac{\partial\Delta u_i(x,t)}{\partial s_s}\mathrm{d}s_x$$
$$+\int_{T_c^+}\frac{\partial\varphi_u^m(y)}{\partial s_y}\mathrm{d}\partial s_y\int_{T_c^+} w_{ij}^{d}(x,y,t)*\Delta\ddot{u}_i(x,t)\mathrm{d}s_x$$
$$=\int_{T_c^+}\varphi_u^m(y)t_j^i(y,t)\mathrm{d}s_x,\qquad y\in T_c^+ \tag{4.3.11}$$

$$B_{ij}^{l}(\eta_l)=(C_{i1p2}+C_{i2p2}\eta_l)(C_{j1k2}+C_{j2k2}\eta_l) \tag{4.3.12}$$

式中，t_j^i 为时域边界。结合时间和空间离散表达式

$$T_c^+=\sum_{n=1}^{N}T_n,\qquad t=Q\Delta t \tag{4.3.13}$$

得到离散的线性矩阵方程为

$$\sum_{n=1}^{N}(w_{ij}^{s,m,n}(\Delta u_i)^{nQ}+\sum_{q=1}^{Q}w_{ij}^{d,m,n,Q-q+1}(\Delta u_i)^{nq})=\sum_{n=1}^{N}D^{mn}t_j^{i,nQ} \tag{4.3.14}$$

式中，Δu_i 为空间步长。其系统矩阵 $w_{ij}^{s,m,n}$、$w_{ij}^{d,m,n,Q-q+1}$和 D^{mn}分别为

$$w_{ij}^{s,m,n}=\frac{1}{\pi}\int_{T_m}\frac{\partial\varphi_u^m(y)}{\partial s_y}\mathrm{d}s_y\int_{T_n}\frac{\partial\varphi_u^n(x)}{\partial s_x}\mathrm{Im}B_{ij}^l(\eta_l)\lg(d_l(x-y))\mathrm{d}s_x \tag{4.3.15}$$

$$w_{ij}^{d,m,n,Q-q+1}=\frac{1}{\pi}\int_{T_m}\varphi_u^m(y)\mathrm{d}s_y\int_{T_n}w_{ij}^d(x,y,Q,\Delta t)*\Delta\ddot{\varphi}_u^q(Q,\Delta t)\varphi_u^n(x)\mathrm{d}s_x \tag{4.3.16}$$

$$D^{mn}=\frac{1}{\pi}\int_{T_m}\varphi_u^m(y)\varphi_t^n(y)\mathrm{d}s_y \tag{4.3.17}$$

当利用矩阵方程组(4.3.14)解得 COD 值后，散射场可以用下面的积分公式计算

$$u_j^S(y,t)=-\int_{T_c^+}h_{ij}(x,y,t)*\Delta u_i(x,t)\mathrm{d}s_x \tag{4.3.18}$$

下面用二维时域边界元法计算裂纹和椭圆孔的散射声场，裂纹长度为 $2a$，椭圆长短轴分别为 a 和 b，$b/a=0.01$，如图 4.24 所示。裂纹沿长度方向划分为 41 个网格，椭圆形孔划分为 80 个网格。介质为各向异性，弹性系数为 $C_{11}=C_{33}=160.7\mathrm{GPa}$，$C_{12}=C_{23}=6.44\mathrm{GPa}$，$C_{22}=13.92\mathrm{GPa}$，$C_{44}=C_{66}=3.5\mathrm{GPa}$，$C_{55}=7.07\mathrm{GPa}$。图 4.25(a)和图 4.25(b)分别为垂直入射时($\theta=0^\circ$)裂纹和椭圆孔的瞬态散射图，归一化时间选择为 0.05、0.25、0.45、0.65，可以看到反射波和尖端衍射波，而且两种缺陷的散射图像非常相似。图 4.25(c)为 45°入射时裂纹的瞬态衍射图。

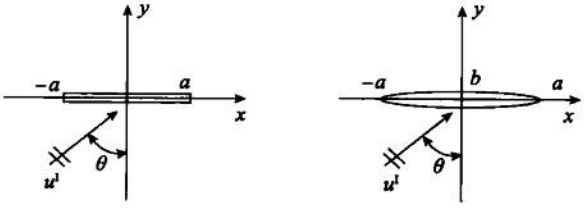
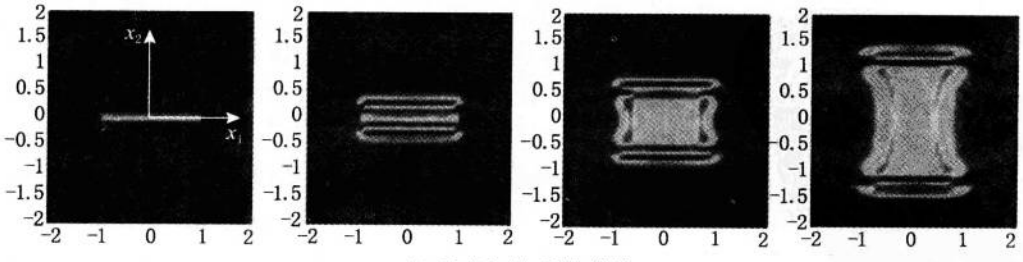
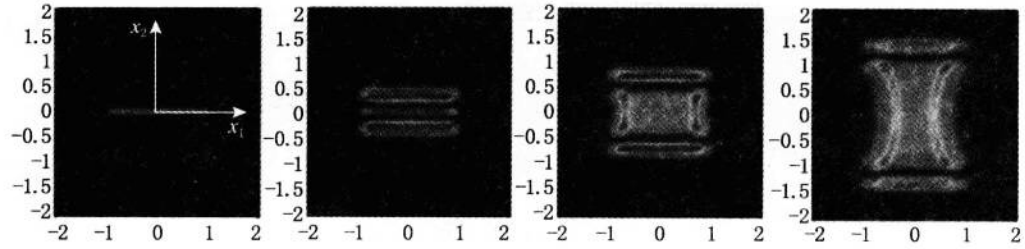


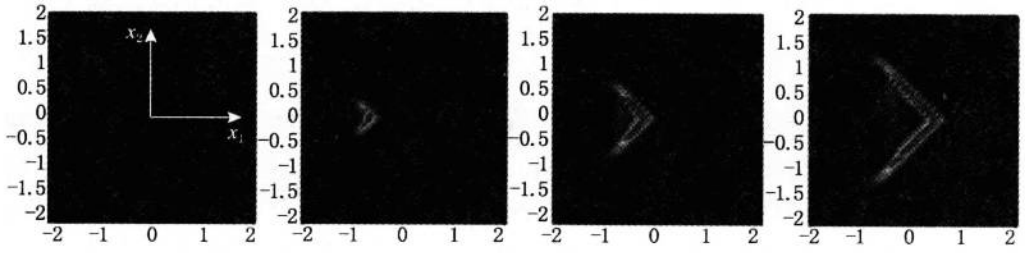
图 4.24　缺陷结构示意图



(a) 垂直入射、裂纹散射



(b) 垂直入射、椭圆散射



(c) 45°入射、裂纹散射

图 4.25 缺陷散射声场

4.3.4 弹性有限积分法[15,17]

弹性有限积分法(EFIT)和 FDM 有一定的相似性,即两者都需要对波动方程作近似处理,但不同的是 EFIT 运用的是积分运动方程。EFIT 的优势在于处理非均质各向异性等复杂介质。然而,非均质材料,特别是缺陷处的网格划分必须要保证各个网格的应力应变是连续的,交错网格的划分必须满足 EFIT 方法的稳定性和收敛条件,这在一定程度上限制了 EFIT 的应用。

下面用 EFIT 进行火车车轮轴承超声检测的声场计算。轴承底面可以简化为如图 4.26(a)所示的几何结构,弧形有两个曲率为 15mm 和 75mm 的圆弧连接,有一裂纹位于弧面上,裂纹自身高度记为 d,取向记为 α,探头位置与左边界的距离记为 x。工件左右边界为开放边界,上下边界为应力自由边界。当探头频率为 2MHz,入射角度为 45°,缺陷高度 $d=2$mm,取向 $\alpha=67.5°$,探头距离左边界为 155mm,计算得到的 A 扫信号图和波场快照图如图 4.26 所示。从图 4.26(b)可以看到,出现两个峰值信号,但借助图 4.26(c)和 4.26(d)的波场快照图,分析得到信号 1 为人为反射信号,其产生的原因是利用笛卡儿网格对弧形底面进行网格划分时产生的粗糙表面,导致超声信号的反射;信号 2 为裂纹反射信号,由超声波在裂纹与弧形底面形成的端角反射得到,而由于裂纹尺寸较小,由尖端产生的衍射信号与端角反射信号重叠,所以只观察到信号 2。

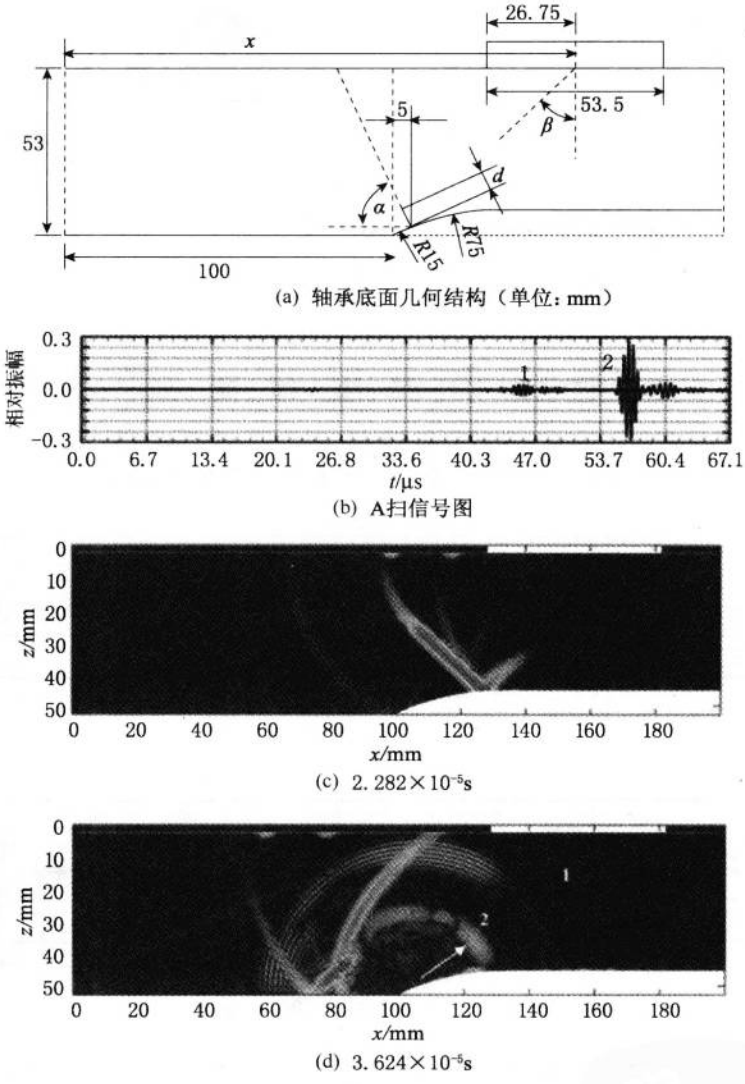


图 4.26　轴承结构及检测计算结果

轴承在使用过程中由于腐蚀作用使其表面有一定的粗糙度。将表面粗糙度近似为图 4.27 所示的几何结构，d 为腐蚀坑宽度，g 为腐蚀坑之间的间距，t 为腐蚀坑深度。探头频率为 2MHz，入射角度为 45°。利用二维 EFIT 计算得到不同腐蚀程度的轴承的反射信号如图 4.28 所示。信号 1 也是由对弧形底面进行网格划分时产生的粗糙表面的人为反射信号。信号 2 为轴承弧形底面与腐蚀坑连接处产生的反射信号。还可以看到，随着腐蚀程度的加剧，信号 2 和噪声信号不断增强。

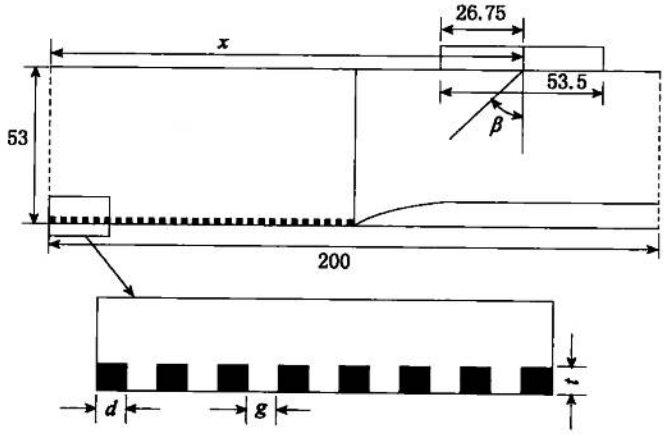
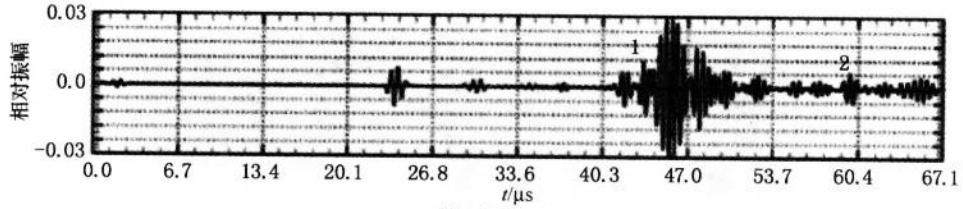
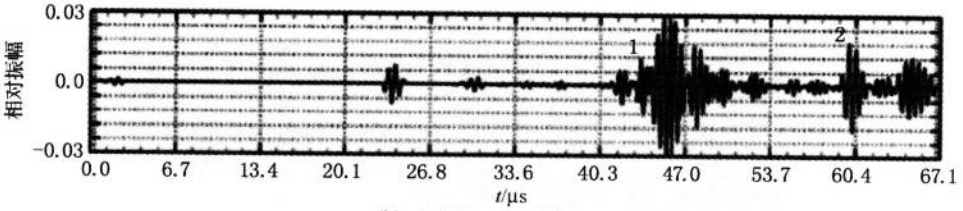


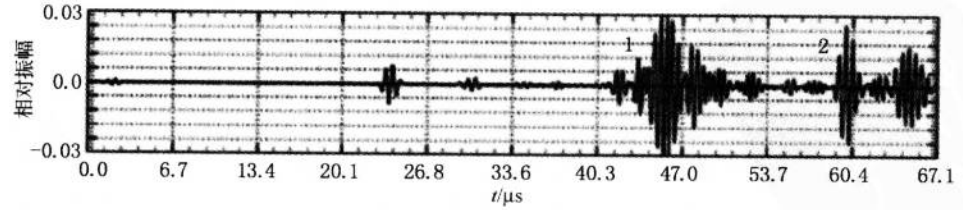
图 4.27　轴承粗糙度几何结构示意图(单位:mm)



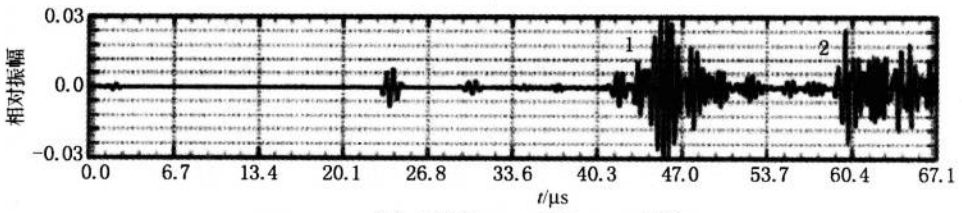
(a) d=0, t=0, g=0



(b) d=200μm, t=200μm, g=200μm



(c) d=200μm, t=400μm, g=200μm



(d) d=200μm, t=400μm, g=400μm

图 4.28　腐蚀程度对检测信号的影响

参 考 文 献

[1] Rose J L. Ultrasonic Waves in Solid Media[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[2] 张海澜. 理论声学[M]. 北京:高等教育出版社,2007.

[3] Ying C F, Truell R. Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid[J]. Journal of Applied Physics, 1956, 27(9): 1086-1097.

[4] Gengembre N. Modelisation du champ ultrasonore rayonne dans un solide anisotrope et heterogene par un traducteur immerge[D]. These de doctorat de l'universite Paris VII, 1999.

[5] Lhemery A. A model for the transient ultrasonic field radiated by an arbitrary loading in a solid[J]. Journal of Acoustic Society of American, 1994, 96(6): 3776-3786.

[6] Chapman R K, Pearce J E. Recent in-house developments in theoretical modelling of ultrasonic inspection[J]. Insight NDT, 2007, 49(2): 93-97.

[7] Gubernatis J E. Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials[J]. Journal of Applied Physics, 1977, 48(7): 2804-2811.

[8] Gubernatis J E. The Born approximation in the theory of the scattering of elastic waves by flaws[J]. Journal of Applied Physics, 1977, 48(7): 2812-2819.

[9] Gubernatis J E. Interpretation of elastic wave scattering theory for analysis and design of flaw characterization experiments: The long wavelength limit[J]. Journal of Applied Physics, 1979, 50(5): 3338-3316.

[10] Gubernatis J E. Long wave approximation for the scattering of elastic waves from flaws with applications to ellipsoidal voids and inclusions[J]. Journal of Applied Physics, 1979, 50(6): 4046-4059.

[11] Satyanarayan L. Simulation of ultrasonic phased array technique for imaging and sizing of defects using longitudinal waves[J]. Pressure Vessels and Piping, 2007, 84(12): 716-729.

[12] Kishore N N. Finite element modeling of the scattering of ultrasonic waves by isolated flaws[J]. NDT&E International, 2000, 33(5): 297-305.

[13] Gengembre N. A semi-analytic-FEM hybrid model for simulating UT configurations involving complicated interactions of waves with defects[C]. Review of Quantitative Nondestructive Evaluation, 2004, 23:74-80.

[14] Tan A. A 2D time-domain BEM for transient wave scattering analysis by a crack in anisotropic solids[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2005,29(6):610-623.

[15] Marklein R. Numerical modeling of ultrasonic NDT of a wheel shaft of an ICE train[C]. ECNDT, 2006:1-8.

[16] 杨德全,赵忠生. 边界元理论及其应用[M]. 北京:北京理工大学出版社,2002.

[17] Schmerr L. Ultrasonic Nondestructive Evaluation Systems Models and Measurements [M]. Berlin: Springer,2007.

第 5 章　超声表面波检测

声表面波(surface acoustic wave，SAW)是产生于半无限大介质表面和近表面的一种特殊振动，它沿着界面传播，其能量集中在表面附近的一层中，远离表面时表面波迅速衰减。1885 年瑞利首先对表面波给予理论上的说明，故表面波又被称为瑞利波。

5.1　表面波的振动与激发

5.1.1　表面波的振动方程[1]

取如图 5.1 所示的坐标系，x_1 为表面波的传播方向；x_2 方向上表面波无限扩展，即波与 x_2 方向无关；x_3 与表面垂直，指向固体内。固体占据所有 $x_3>0$ 的空间，其余空间为真空，则由广义胡克定律和动力学方程可得波动方程：

$$\frac{C_{ijkl}\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\rho\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{5.1.1}$$

式中，C_{ijkl} 为弹性系数；ρ 为固体密度；u_i 为位移矢量。自由的边界条件是法向的三个应力为零，假设方程有简谐波的解

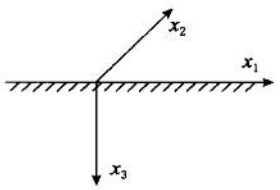


图 5.1　表面波传播过程坐标系

$$u_i = B_i\exp(\mathrm{j}(k_s x_1 + ak_s x_3 - \omega t)) \tag{5.1.2}$$

式中，k_s 为表面波的波矢；ω 为角频率。令波矢 $k=(k_s, ak_s)$，则可以称 a 为特征根。将式(5.1.2)代入式(5.1.1)中，得

$$[\Gamma_{ij}][B_j]=0 \tag{5.1.3}$$

式中，左边第一项是克里斯托费尔矩阵：

$$\Gamma_{ij}=C_{3i3j}a^2+(C_{1i3j}+C_{3i1j})a+C_{1i1j}-\delta_{ij}\rho v_s^2 \tag{5.1.4}$$

当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$，否则 $\delta_{ij}=0$。使得 B_j 不全为零的条件是克里斯托费尔矩阵行列式为零，由此可求得 6 个 a，取其中虚部大于零的三个根，并假设三个系数 C_1、C_2、C_3 构成如下的波动位移解：

$$u_j=\sum_{n=1}^{3}C_n B_{jn}\exp(\mathrm{j}(k_s x_1 + a_n k_s x_3 - \omega t)) \tag{5.1.5}$$

将之代入自由的边界条件则有

$$[\prod_{jn}][C_n]=0 \tag{5.1.6}$$

式中，左边第一项的系数矩阵为

$$\prod_{jn}=C_{3jk1}B_{kn}+C_{3jk3}B_{km}a_m\delta_{mn} \tag{5.1.7}$$

同样，系数 C 不全为零的条件是左边第一项矩阵的系数矩阵行列式的值为零，由此可求得系数 C，即可求得波动位移解。

若固体介质是非压电性的各向异性介质，由上述方法可以求得对应表面波波速的波动位移解；若固体介质是各向同性介质，由于弹性系数较为简单的关系，式(5.1.3)的克里斯托费尔矩阵可简化为

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma_{11}&=\frac{(C_{11}-C_{12})a^2}{2}+C_{11}-\rho C_s{}^2\\
\Gamma_{22}&=\frac{(C_{11}-C_{12})(a^2+1)}{2}-\rho C_s{}^2\\
\Gamma_{33}&=C_{11}a^2+\frac{C_{11}-C_{12}}{2}-\rho C_s{}^2\\
\Gamma_{13}&=\Gamma_{31}=\frac{(C_{11}+C_{12})a}{2}\\
\Gamma_{12}&=\Gamma_{21}=\Gamma_{23}=\Gamma_{32}=0
\end{aligned}\right\} \tag{5.1.8}$$

由此可以直接求得 a 值

$$\left.\begin{aligned}
a_1&=a_2=\mathrm{j}\left[1-\left(\frac{c_s}{c_T}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
a_3&=\mathrm{j}\left[1-\left(\frac{c_s}{c_L}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\} \tag{5.1.9}$$

式中，c_T 为固体介质中的横波波速；c_L 为固体介质中的纵波波速；c_s 为表面波波速

$$\left.\begin{aligned}
c_T&=\left(\frac{C_{11}-C_{12}}{2\rho}\right)^{\frac{1}{2}}\\
c_L&=\left(\frac{C_{11}}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\} \tag{5.1.10}$$

由此可以求得的解有两个：

$c_T=c_s$ 时，即固体表面波波速等于固体横波波速：

$$\left.\begin{aligned}
u_1&=0\\
u_2&=C_1\exp(\mathrm{j}(k_sx_1-\omega t))\\
u_3&=0
\end{aligned}\right\} \tag{5.1.11}$$

这种情况是普通的横波波动，它并不是表面波。

$c_T\neq c_s$ 时，可以得到表面波的声速方程：

$$\left[2-\left(\frac{c_s}{c_T}\right)^2\right]^2=4\left[1-\left(\frac{c_s}{c_T}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[1-\left(\frac{c_s}{c_L}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.1.12}$$

由此计算表面波波速，并由之求得系数 C 及相应 x_1、x_2、x_3 方向上的位移：

$$u_1=c\left[\exp\left(-\left[1-\left(\frac{c_s}{c_L}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}k_s x_3\right)-A\exp\left(-\left[1-\left(\frac{c_s}{c_T}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}k_s x_3\right)\right]\exp(\mathrm{j}(k_s x_1-\omega t))$$

$$u_2=0$$

$$u_3=-\mathrm{j}c\left[1-\left(\frac{c_s}{c_L}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\exp\left(-\left[1-\left(\frac{c_s}{c_L}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}k_s x_3\right)\right.$$

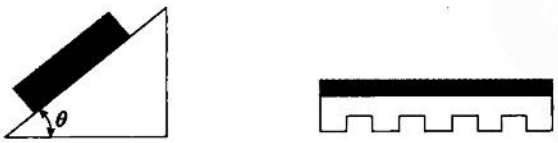
$$\left.-\exp\left(-\left[1-\left(\frac{c_s}{c_T}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\frac{k_s x_3}{A}\right)\right]\exp(\mathrm{j}(k_s x_1-\omega t))$$

式中，$A=[1-(c_s/c_T)^2]^{1/4}[1-(c_s/c_L)^2]^{1/4}$；$c$ 为待定系数。瑞利波的质点位移只有两个分量，一个与波传播的方向平行，另外一个与固体表面垂直，而且这两个分量的相位差 90°。所以此波的质点位移轨迹是一个椭圆，且椭圆所在面与 $x_2=0$ 面平行。因为固体中 $c_T<c_L$，代入到位移表达式中可知，表面波在 x_3 方向的振幅大于 x_1 方向的振幅，即椭圆的长轴一定是在 x_3 方向上，短轴在 x_1 方向上。此外，质点位移的振幅随着离开表面的距离而呈指数衰减。

5.1.2　表面波的激发源[2]

常用的声表面波激发源是楔形换能器和梳状换能器。楔形换能器是在普通体波换能器上加一个楔形固体，如图 5.2(a)所示。当楔块的倾斜角度为临界值时，换能器所激发的体波在固体介质表面有效地转换成表面波，而不会激发出体波。楔块的倾斜角 $\theta=\arcsin(c/c_s)$，式中，c 为楔块中的波速，c_s 为固体介质中的表面波波速。因此这种情况下，激发表面波的必要条件是楔块中的体波波速要大于固体介质中的表面波波速。

梳状换能器是在普通体波换能器上加一个梳状结构，如图 5.2(b)所示。这种梳状结构的周期间隙为待激发固体介质中表面波波长的一半，能够有效地激发表面波。



(a) 楔形换能器　　(b) 梳状换能器

图 5.2　表面波换能器

5.2 半解析法[3,4]

由液体介质中的点源 P 激发出球面波，经过液固界面转换成表面波并在界面上传播和散射，M 为观察点，如图 5.3 所示。图 5.3(a)与图 5.3(b)中的点源 P 均在液体中，图 5.3(a)中的观察点 M 处于点源一侧的液体中，接收到的是伪表面波，图 5.3(b)中的观察点 M 处于点源一侧的固体中，接收到的是表面波。

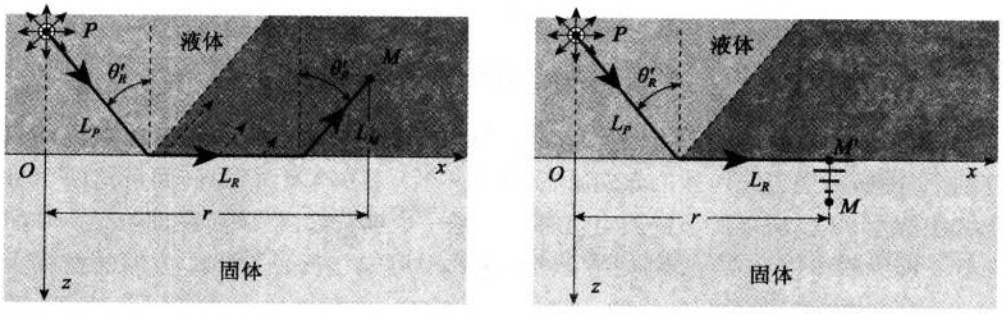


图 5.3 表面波的传播路径

点源 P 所激发的球面波经过界面反射后达到观察点 M，则 M 点的标量势 $\bar{\varphi}_{\text{refl}}(M;P)$ 为

$$\bar{\varphi}_{\text{refl}}(M;P)=\bar{\varphi}_0 \mathrm{j}k_0\int_{\Gamma}A(\theta)\mathrm{H}_0^{(1)}(k_0 r\sin\theta)\exp(\mathrm{j}k_0\mid z_M+z_P\mid\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{5.2.1}$$

式中，z_M、z_P 分别为 M 点和 P 点在 z 轴方向上的位置；$\bar{\varphi}_0$ 为点源 P 的标量势；k_0 为液体中的波数；$A(\theta)$是与入射角 θ 有关的反射系数；Γ 是积分范围，式(5.2.1)的积分下限是 $\mathrm{j}\infty-\frac{\pi}{2}$，积分上限是 $-\mathrm{j}\infty+\frac{\pi}{2}$。用最速下降法(saddle point method)可以得到式(5.21)的半解析近似。该渐近解允许对镜面反射波、非镜面反射的纵头波(longitudinal head wave)、横头波(transverse head wave)和伪表面波分别独立计算。这些依赖于最速下降点(saddle point location)的位置，即与入射到界面的入射角 θ_0 有关。当 θ_0 大于纵波全反射的反射角时，纵头波会出现；同理，当 θ_0 大于横波全反射的反射角时，横头波会出现。这两个波的出现都会削弱反射系数 $A(\theta)$。

$$\left.\begin{aligned}c_R&=\mathrm{Re}\left(\frac{c_0}{\sin\theta_R}\right)\approx\frac{c_0}{\sin\theta_R'}\\ \alpha_R&=\omega\mathrm{Im}\left(\frac{\sin\theta_R}{c_0}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.2.2}$$

式(5.2.2)用于计算瑞利波的波速 c_R 和衰减系数 α_R。式中，c_0 是液体介质中的波速；θ_R 是点源 P 入射到界面时的入射角；θ'_R 是伪表面波经过观察点时的观察角；ω 为角频率。由此，液体中的伪表面波表达式可以写成

$$\bar{\varphi}_{\text{Rayleigh_fluid}}(M;P)=\bar{\varphi}_0\frac{A_{\text{fluid}}}{\sqrt{r}}\exp(-\alpha_R L_R)\exp\left(\mathrm{j}\omega\left(\frac{L_P+L_M}{c_0}+\frac{L_R}{c_R}\right)\right) \tag{5.2.3}$$

式中，A_{fluid} 为振幅系数；L_P 为点源 P 到界面上入射点的距离；L_M 为界面上反射点到观察点 M 的距离；L_R 为界面上入射点到反射点间的距离；r 为点源 P 与观察点 M 间的水平(平行于界面)距离，如图 5.3(a)所示。$(L_P+L_M)/c_0+L_R/c_R$ 描述的是超声波从点源 P 经表面传播到观察点 M 的时间，在这个过程中瑞利波的漏损量用 $\mathrm{e}^{-\alpha_R L_R}$ 描述。

以上描述的是伪表面波在液体介质中的声场。考虑固体介质中近表面处的表面波声场需要先计算出观察点 M 正上方 M' 处的标量势 $\bar{\varphi}_{\text{Rayleigh_fluid}}(M';P)$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\varphi}_{\text{Rayleigh_solid}}(M/P)&\approx\bar{\varphi}_{\text{Rayleigh_fluid}}(M';P)A_{\text{L}}(\omega)\mathrm{e}^{-\alpha_{\text{L}}MM'}\\ \bar{\psi}_{\text{Rayleigh_solid}}(M/P)&\approx\bar{\varphi}_{\text{Rayleigh_fluid}}(M';P)A_{\text{T}}(\omega)\mathrm{e}^{-\alpha_{\text{T}}MM'}\end{aligned}\right\} \tag{5.2.4}$$

式中，A_{L}、A_{T} 分别是纵波和横波在液体中的标量势与在固体中的标量势的比值；α_{L}、α_{T} 分别是纵波分量和横波分量在远离界面时的衰减系数。式(5.2.4)中从 M' 点到 M 点纵波分量和横波分量的衰减因子分别是 $\mathrm{e}^{-\alpha_{\text{L}}MM'}$ 和 $\mathrm{e}^{-\alpha_{\text{T}}MM'}$。

由式(5.2.4)中的独立衰减项可以看出，超声波的衰减与 $\sqrt{r}$ 成正比，这是二维条件下超声波衰减的典型特征。如图 5.4 所示，r 是声束在界面上的部分长度与液体中入射射线在界面上的投影部分长度之和。因此，相应表面波散射衰减可以只考虑表面波传播所在平面上的 DF。这可以由表面波存在的必要条件来说明，即入射角固定 $\theta_R=\arcsin(c_R/c_0)$，其中 c_R 为表面波波速，c_0 为液体中超声波波速。

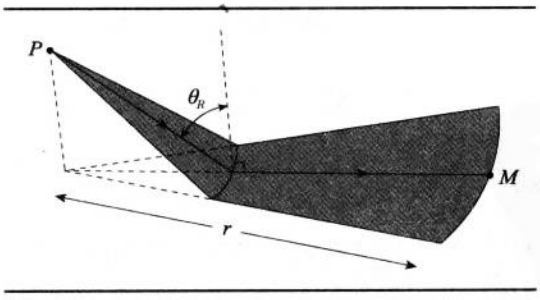


图 5.4　二维情况下表面波的 DF

独立计算超声波传播过程中表面波的部分如图 5.5 所示，界面以上部分为液体介质，分布着伪表面波声场，界面以下部分为固体部分，分布着表面波声场。图 5.6(a)是只考虑体波情况下的超声波传播声场，图 5.6(b)为同时考虑体波和表面

波情况下的超声波传播声场。

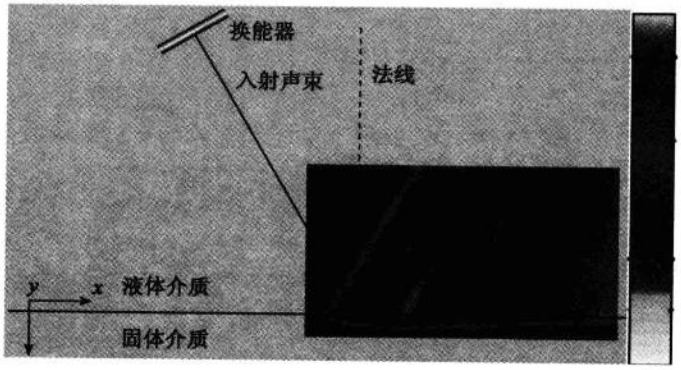
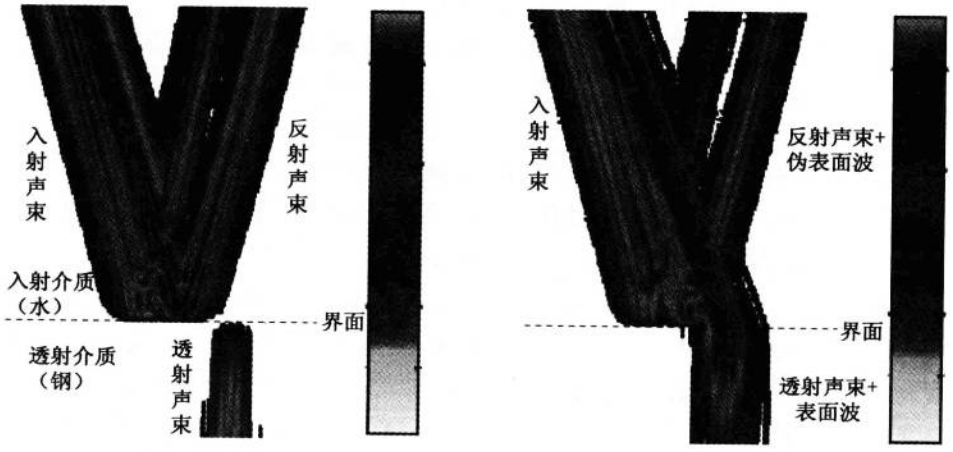


图 5.5 表面波的声场分布



(a) 不考虑表面波时的超声波传播声场　　(b) 考虑体波和表面波的超声波传播声场

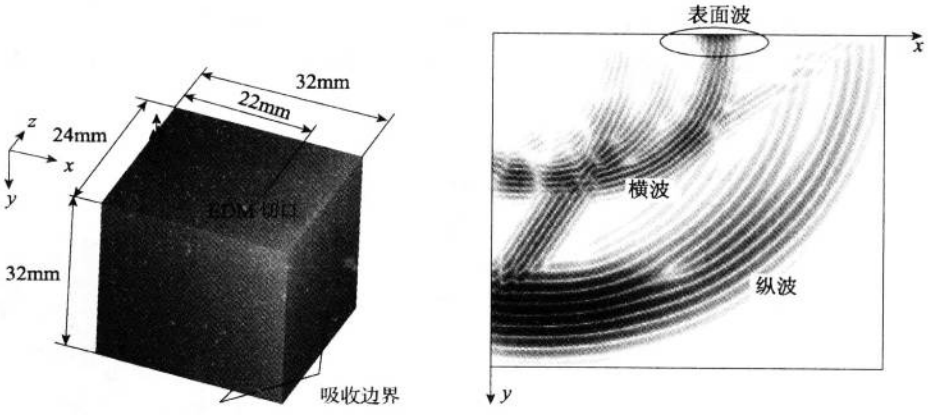
图 5.6 有无表面波时的声场对比图

5.3 表面波的数值解

5.3.1 有限差分法[5]

表面波有限差分法计算与体波有限差分法计算相同。以结构钢为研究对象，用有限差分法计算超声波在工件中的传播。计算过程中用到的结构钢的声学参数：密度为 7890kg/m^3，钢中纵波波速为 5890m/s，横波波速为 3230m/s，表面波波速为 2996m/s；工件的长、宽、高分别为 32mm、32mm、24mm，在距离边缘 10mm 处设置一表面开口缺陷，为了避免计算过程中界面处反射波的影响，在非缺陷的界面处设置吸收边界，如图 5.7(a)所示，图 5.7(b)显示的是 6.029 μs 时，z=12mm 处

的 Oxy 截面上的超声波传播瞬态声压分布。实验过程中用激光干涉法在距离缺陷不同位置 x_r(1.9mm、5.6mm、5.8mm)处记录检测信号，将实际检测数据与有限差分计算数据进行对比，结果如图 5.8 所示。实线为有限差分法计算结果，虚线为实验检查结果，结果较为吻合。



(a) 工件示意图　　(b) 超声波传播瞬态图

图 5.7　有限差分计算示意图

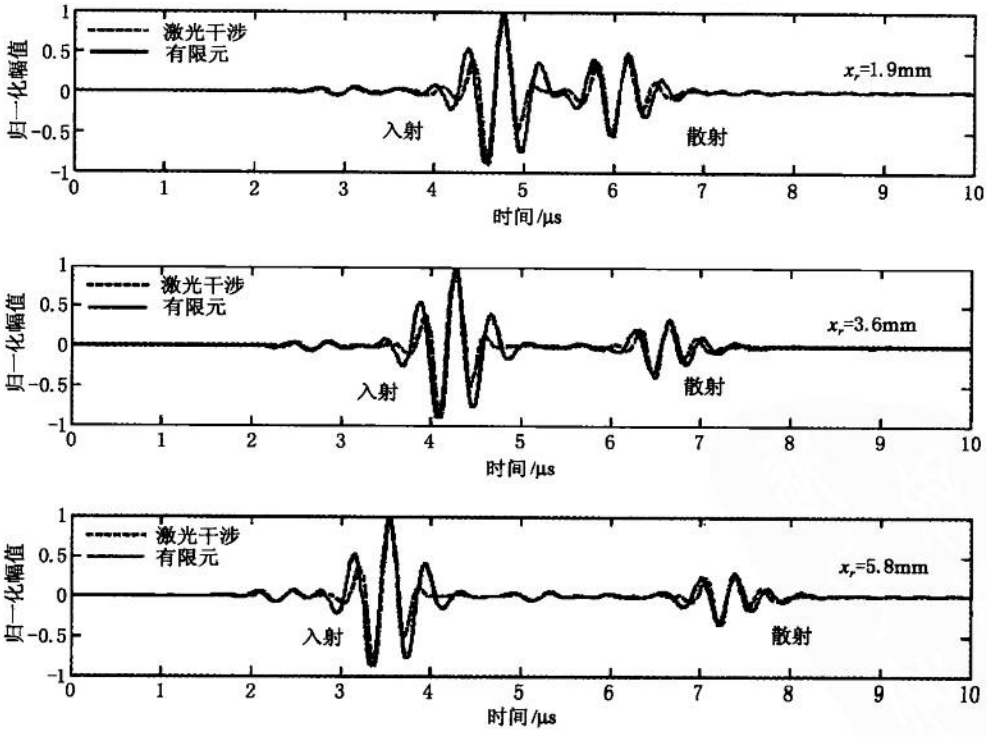
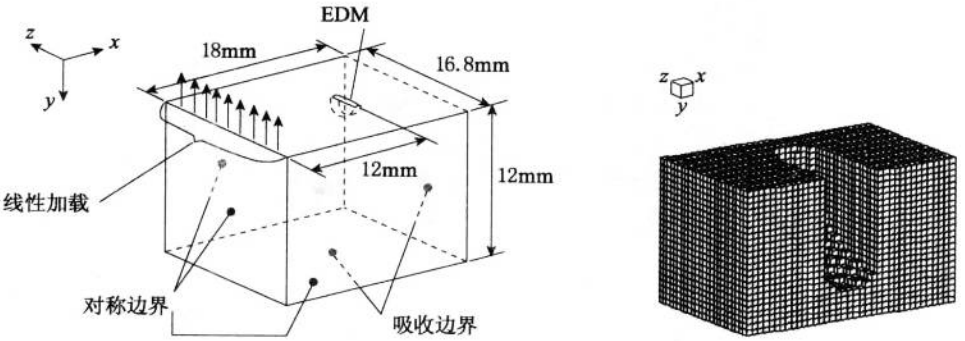


图 5.8　实验结果与有限差分法计算结果对比图

5.3.2 有限元法[6]

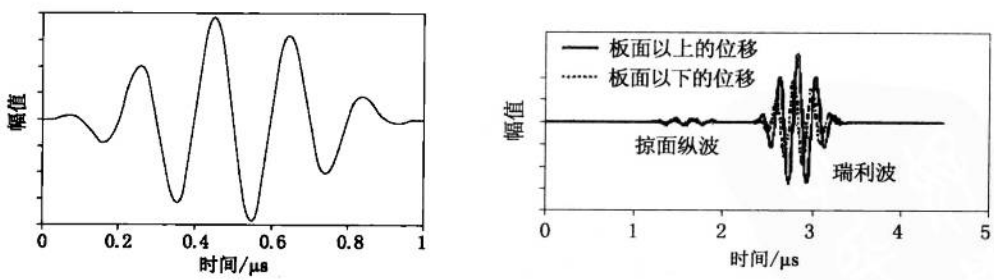
表面波有限元计算与体波有限元计算方法相同。如在方形工件中设置半圆形缺陷(见图 5.9(a)),该工件尺寸为 18mm×16.8mm×12mm,在距离缺陷 12mm 处加载平行于缺陷的形载荷,裂纹长 0.48mm,深 0.24mm,为了消除界面处反射声波的影响,相应界面处设置吸收边界,图 5.9(b)为缺陷附近的有限元网格划分。



(a) 工件示意图　　(b) 缺陷附近的网格划分

图 5.9 有限元计算示意图

图 5.10(a)为 $x=0$mm 处的质点振动图形,即加载载荷。采用有限元进行计算后,得到图 5.10(b),此时表面波未达到裂纹。使用激光干涉法记录实验过程中,在距离缺陷不同位置的检测信号,将实际检测数据与有限元计算数据进行对比,结果如图 5.11 所示。实线为有限元法计算结果,虚线为实验检查结果,结果较为吻合。



(a) 激励信号　　(b) 表面波A显信号

图 5.10 表面波的激励与接收

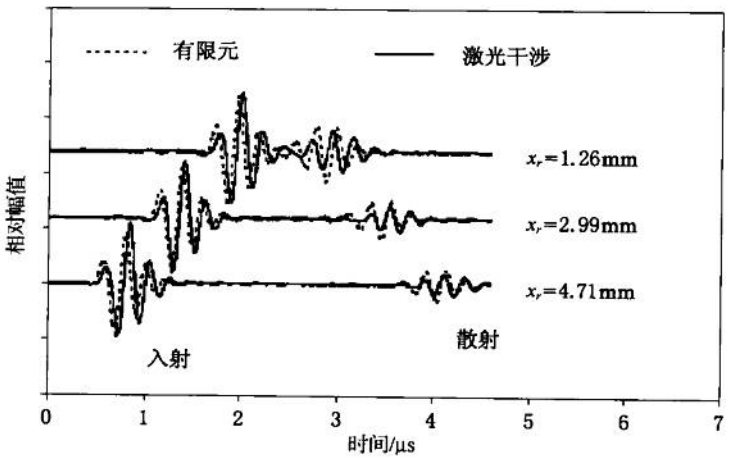


图 5.11　实验结果与有限元计算结果对比

参 考 文 献

[1] 应崇福．超声学[M]．北京：科学出版社，1993.

[2] 何存富译．固体中的超声波[M]．北京：科学出版社，2005.

[3] Leymarie N, Lhémery A, Calmon P, et al. Simulation of ultrasonic examinations using surface acoustic waves[C]. WCNDT, Montreal, 2004.

[4] Lhémery A, Leymarie N, Calmon P, et al. Simultaneous calculation of bulk and surface transient waves radiated by water-coupled ultrasonic transducers[C]. QNDE, 2005.

[5] Lu C, Zhang Z D. Finite-difference simulation of rayleigh wave scattering at a surface crack with experimental verification[C]. Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Application, 2008: 468-472.

[6] Hassan W, Veronesi W. Finite element analysis of Rayleigh wave interaction with finite-size, surface-breaking cracks[J]. Ultrasonics, 2003, 14(1): 41-52.

第6章 超声导波

导波是波在杆、管、板等结构的波导介质中传播时，不断地与介质的上下边界发射折射、反射及纵波与横波之间的波形转换作用而产生的波[1,2]。目前，导波检测主要用于薄板检测和长距离管道检测[2]。由于导波的频散特性，导波存在无数种模态，在检测过程中，即使激发单一模态的导波，在与缺陷相互作用之后，可能会产生多种模态，影响缺陷的评定。因此，通过计算导波的发射声场及导波与缺陷的相互作用，可以帮助检测人员选择传感器及其布置方式、导波检测模态、导波激励信号、解释缺陷信号等。

6.1 频散方程

导波与体波在本质上是一样的，因此都可以用波动方程来描述，不同的是体波的求解无需满足边界条件，而导波的求解在满足波动方程的同时，必须满足波导介质的上下边界条件[1]。正是由于边界条件的引入，使得导波具有频散特性，存在无数种模态解，从而使得求解过程复杂。各向同性固体中的波动方程为

$$(\lambda+2\mu)\nabla\nabla u-\mu\nabla\times\nabla\times u=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6.1.1}$$

应力和位移的边界条件通常表示为

$$u(x,t)=u_0(x,t) \tag{6.1.2}$$

$$t_i=\sigma_{ij}n_j \tag{6.1.3}$$

式中，t_i 为表面应力；σ_{ij} 为沿着坐标轴各个方向的正应力和剪切应力；n_j 为垂直于表面方向的单位矢量。

在板、杆、管等波导介质中传播的导波，会由于不同的应力和位移边界条件，表现出不同的频散方程及传播特点，常用势函数法和子波分析法来求解各种导波模态。

6.1.1 板导波

如图6.1所示的壁厚为 d 的板结构，声束在上下表面反射及波形转换，在传播一段时间后叠加形成“波包”，即通常说的板中的导波模态[1,3]。对于不同入射角、频率及板的厚度，产生的模态不尽相同。

常用势函数法来求解导波模态，首先利用亥姆霍兹分解，将方程(6.1.1)分解为两个波导方程，若考虑平面应变假设：

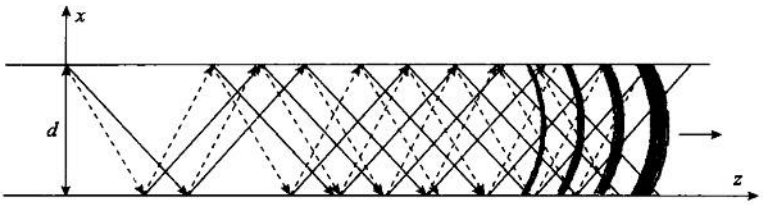


图 6.1 板介质中导波传播示意图

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{6.1.4}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{6.1.5}$$

分别控制纵波和剪切波。平面假设忽略了水平剪切波(SH 波)等其他模态的波。假设式(6.1.4)和式(6.1.5)的解为沿 z 轴方向的行进波和沿 x 轴方向的驻波,则解的形式如下:

$$\phi=\Phi(z)\exp(\mathrm{i}(kx-\omega t)) \tag{6.1.6}$$

$$\psi=\Psi(z)\exp(\mathrm{i}(kx-\omega t)) \tag{6.1.7}$$

带入式(6.1.4)和式(6.1.5),解得

$$\Phi(z)=A_1\sin(pz)+A_2\cos(pz) \tag{6.1.8}$$

$$\Psi(z)=B_1\sin(qz)+B_2\cos(qz) \tag{6.1.9}$$

式中

$$p^2=\frac{\omega^2}{c_L^2}-k^2,\quad q^2=\frac{\omega^2}{c_T^2}-k^2 \tag{6.1.10}$$

根据 A_i 和 $B_i(i=1,2)$的取值不同,可以分为对称模态和反对称模态,其中对称模态满足 $A_1=B_2=0$,反对称模态满足 $A_2=B_1=0$。当然,对称与反对称模态的划分只是一个特例,对于各向异性介质,无法区分对称与反对称模态。

引入应力边界条件,在板的上下边界应力为零,即

$$\sigma_{zz}=\sigma_{xz}=0 \tag{6.1.11}$$

利用边界条件可以列出关于未知常数 A_2 和 B_1(对称情况)、A_1 和 B_2(反对称情况)的齐次方程。如果齐次方程的解为非平凡解,则必需满足系数矩阵行列式为零。通过适当的变换,可以得到自由板中平面应变假设的频散方程为

对称模态

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)}=-\frac{4k^2pq}{(q^2-k^2)^2} \tag{6.1.12}$$

反对称模态

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)}=-\frac{(q^2-k^2)^2}{4k^2pq} \tag{6.1.13}$$

式(6.1.12)和式(6.1.13)为 Rayleigh-Lamb 频率方程。

以上平面假设只考虑了纵波(P 波)、垂直横波(SV 波)解,忽略了平剪切波(SH 波)。SH 波只有在 y 方向的分量不为零,可以假设 SH 波的解的形式为

$$u_y(x,z,t) = U(x)\exp(\mathrm{i}(kz - \omega t)) \tag{6.1.14}$$

表示波在 z 轴方向传播,在 x 轴方向有一个 $U(x)$ 振幅分布。将式(6.1.14)带入波动方程,可以得到

$$U(y) = A\sin(qy) + B\cos(qy) \tag{6.1.15}$$

式中,$q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2$。

和平面应变假设一样,可以根据 A 和 B 取值的不同,将位移场分解为对称分量和反对称分量。对称模态满足 $A=0$,反对称模态满足 $B=0$。

引入应力边界条件,在板的上下边界上剪切应力为零,即

$$\tau_{xy} = 0 \tag{6.1.16}$$

得到频散方程为

对称模态

$$\sin(qy) = 0 \tag{6.1.17}$$

非对称模态

$$\cos(qy) = 0 \tag{6.1.18}$$

通过与式(6.1.12)和式(6.1.13)比较,可以看到 SH 波的频散方程简单,可以直接求解。

选择一组频厚积 fd,利用迭代法求解频散方程,得到铝板中兰姆波频散曲线如图 6.2 所示。钢板厚度为 1mm,可以看到各种模态 A_0、S_0、SH_0、A_1、S_1……的频散特性。

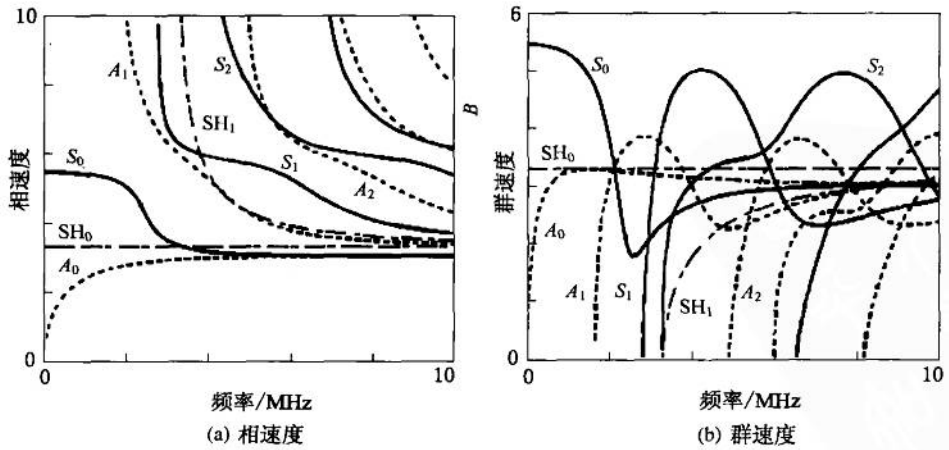


图 6.2 板中导波频散曲线

6.1.2 管导波

在管介质中存在周向和纵向等模态的导波，可以根据不同的边界条件，带入求解。对于如图 6.3 所示的沿管道周向传播的波，在柱坐标体系下，在 $Or\theta$ 面上，沿 θ 方向传播，弹性场与 z 坐标无关，所以和平板中的兰姆波解类似。位移场可以写为如下形式

$$u_r = u_r(r,\theta), \quad u_\theta = u_\theta(r,\theta), \quad u_z = 0 \tag{6.1.19}$$

利用势函数 ϕ 和 ψ 得到位移分量 u_r 和 u_θ 分别为

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{6.1.20}$$

势函数 ϕ 和 ψ 满足波动方程

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\phi + \frac{\omega^2}{c_L^2}\phi = 0\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\psi + \frac{\omega^2}{c_T^2}\psi = 0\end{aligned}\right\} \tag{6.1.21}$$

其边界条件为在圆柱体内外表面的应力为零，即

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \tag{6.1.22}$$

对于这样的边值问题，可以假设波动方程的解为

$$\left.\begin{aligned}\phi = \Phi(r)\exp(\mathrm{i}(kb\theta - \omega t))\\ \psi = \Psi(r)\exp(\mathrm{i}(kb\theta - \omega t))\end{aligned}\right\} \tag{6.1.23}$$

带入波动方程(6.1.21)可以得到通解为

$$\left.\begin{aligned}\Phi(r) = A_1 \mathrm{J}_M\left(\frac{\omega r}{c_L}\right) + A_2 \mathrm{Y}_M\left(\frac{\omega r}{c_L}\right)\\ \Psi(r) = B_1 \mathrm{J}_M\left(\frac{\omega r}{c_T}\right) + B_2 \mathrm{Y}_M\left(\frac{\omega r}{c_T}\right)\end{aligned}\right\} \tag{6.1.24}$$

式中，$\mathrm{J}_M(z)$ 和 $\mathrm{Y}_M(z)$ 分别是第一类和第二类贝塞尔函数。利用在圆柱体内外表面的应力为零的边界条件可以得到有关常数 A_1、A_2、B_1、B_2 的线性齐次方程组，如果齐次方程的解为非平凡解，则必需满足系数矩阵行列式为零，即得到频散方程：

$$\| D_{mn} \| = 0 \tag{6.1.25}$$

对于如图 6.3 所示的沿管道周向传播的导波，其边界条件为

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0 \tag{6.1.26}$$

对于这样的边值问题，可以假设质点径向、周向、轴向位移分量为

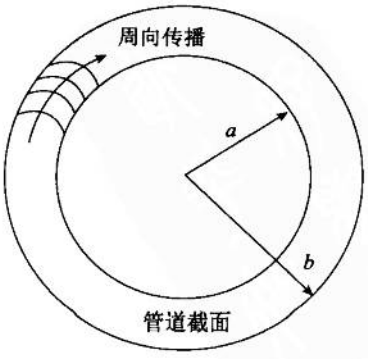


图 6.3 管道导波传播示意图

$$\left.\begin{aligned} u_r &= U_r(r)\cos n\theta\cos(\omega t + kz) \\ u_\theta &= U_\theta(r)\sin n\theta\cos(\omega t + kz) \\ u_z &= U_z(r)\cos n\theta\sin(\omega t + kz) \end{aligned}\right\} \tag{6.1.27}$$

式中，周向阶数为 $n=0,1,2,3,\cdots$。依据应力边界条件及齐次方程求解，可以得到频散方程。

实际上，应力波在管介质中传播时，存在几种传播模态：纵向、扭转和弯曲模态。当 $n=0$ 时，称为轴对称模态，纵向和扭转模态都属于轴对称模态，当 $n>0$ 时，称为非轴对称模态，弯曲模态属于非轴对称模态。因此，各种模态可以方便的表示如下：

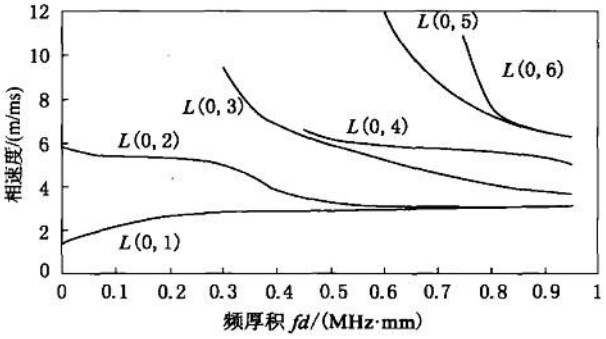
纵向模态：$L(0,m)$ 轴对称

扭转模态：$T(0,m)$ 轴对称

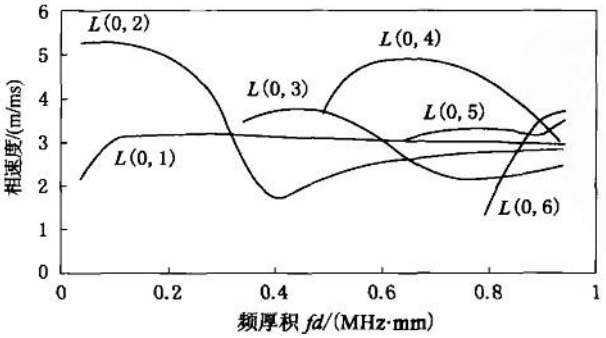
弯曲模态：$F(n,m)$ 非轴对称

其中，周向阶数为 $n=1,2,3,\cdots$，模态数 $m=1,2,3,\cdots$。

利用上述频散方程求解得到纵向、扭转、弯曲模态的频散曲线如图 6.4～图 6.6 所示。其中，图 6.4 和图 6.5 为铬镍铁合金管计算结果，管内径为 16.46mm，壁厚为 1.22mm，纵波波速为 6290m/s，横波波速为 3230m/s；图 6.6 为不锈钢管计算结果，管内径为 19.05mm，壁厚为 1.615mm，纵波波速为 5800m/s，横波波速为 3100m/s。



(a) 相速度频散曲线图



(b) 群速度频散曲线图

图 6.4 纵向模态的频散曲线图

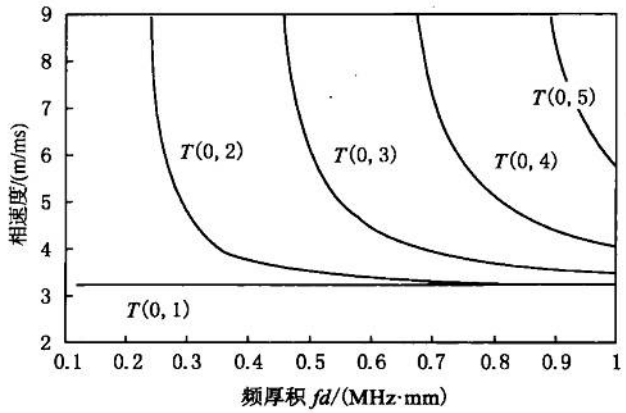


图 6.5 扭转模态的频散曲线图

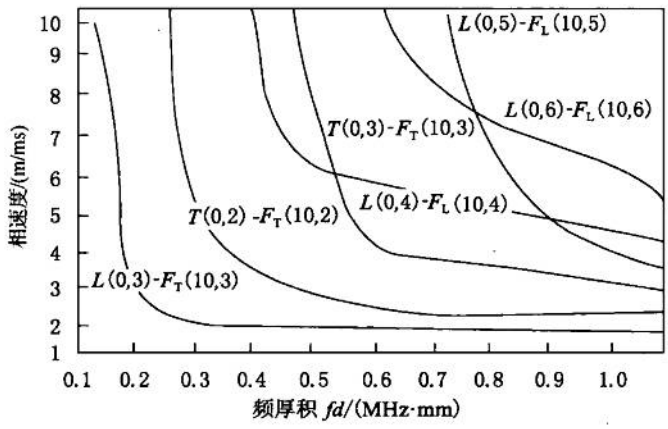


图 6.6 弯曲模态的频散曲线图

6.1.3 各向异性介质中的导波

利用势函数法求解各向同性介质的波动方程时，引入亥姆霍兹势函数可以将波动方程分解为两个简单的方程。但是在各向异性介质中，通过亥姆霍兹分解，无法得到两个简单的方程，因此势函数法不适用于各向异性介质中波动方程的求解。通常采用引入子波分析法处理各向异性介质问题。子波分析法的基本思想是将介质层中的导波看成是六个子波的叠加，它们分别是三个上行平面波(一个准纵波和两个准横波)和三个下行波。六个子波满足波动方程，而且对于图 6.7 所示的情况，可以将每个子波的数学表达式写为

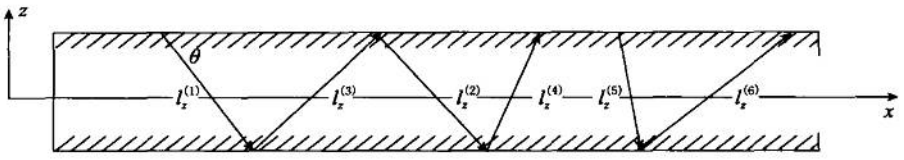


图 6.7 子波分解法示意图

$$u_i = a_i \exp(\mathrm{i}k(x + l_z z) - \mathrm{i}\omega t) \tag{6.1.28}$$

式中，l_z 前面的正号表示向下传播，负号表示向上传播。根据斯内尔定律，六个子波的 x 轴分量相等。由图 6.7 可以看到，$l_z = \tan\theta$。将式(6.1.26)带入波动方程，得到

$$(C_{ijkl}k_j k_l - \rho\omega\delta_{ik})a_k = 0 \tag{6.1.29}$$

若方程(6.1.29)有非平凡解，则系数行列式为零，即

$$\det(C_{ijkl}k_j k_l - \rho\omega\,\delta_{ik}) = 0 \tag{6.1.30}$$

将式(6.1.30)展开为关于六个子波的 l_z 的六次多项式：

$$Al_z^6 + Bl_z^5 + Cl_z^4 + Dl_z^3 + El_z^2 + Fl_z + G = 0 \tag{6.1.31}$$

式中的系数为介质密度和弹性系数及选定的相速度的函数。根据不同的晶体结构，式(6.1.31)的求解难易程度会有差别。当求得六个 l_z 之后，即可以得到六个偏转矢量 $a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots, a^{(6)}$，然后将六个子波进行线性叠加，得到兰姆波的位移矢量为

$$u_j = \sum_{n=1}^{6} C_n a_j^{(n)} \exp(\mathrm{i}k(x + l_z^{(n)} z) - \mathrm{i}\omega t) \tag{6.1.32}$$

满足介质上下表面应力为零的边界条件

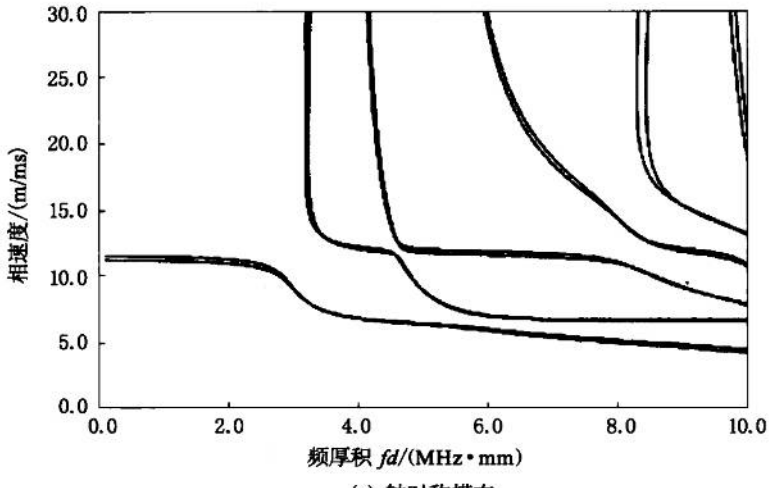
$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \tag{6.1.33}$$

然后，同样利用系数矩阵行列为零，得到频散方程

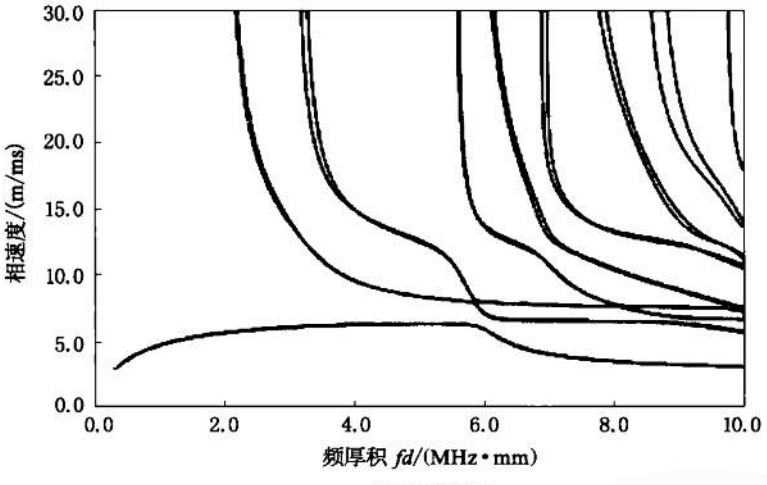
$$\det(B(\rho, C_{ijkl}, hk, \omega)) = 0 \tag{6.1.34}$$

式中，B 为包含了材料厚度、密度及波矢 k 沿 x 方向分量的信息。

利用子波分解法计算得到单层复合材料中导波的传播模态如图 6.8 所示，材料弹性常数为 $C_{11} = 128.2\mathrm{GPa}$，$C_{22} = C_{33} = 14.95\mathrm{GPa}$，$C_{22} = 3.81\mathrm{GPa}$，$C_{55} = C_{66} = 6.73\mathrm{GPa}$，$C_{12} = C_{13} = 6.9\mathrm{GPa}$，$C_{23} = 6.9\mathrm{GPa}$，密度为 $\rho = 1.58\mathrm{g/cm^3}$。



(a) 轴对称模态



(b) 周向模态

图 6.8 各向异性介质导波频散曲线

6.2 模态分解法

在考虑导波与缺陷作用时，假设只存在一种散射模态不符合边界条件，为了得到散射问题的精确解，必须考虑无限多个传播和非传播的模态[4]。但在进行模拟计算时，不可能考虑所有的传播和非传播。模态分解法的基本思想为将散射模态

分解为有限个典型模态，考虑这有限个模态以得到散射问题的近似解。

现用模态分解法进行图 6.9 所示的带有台阶的板结构的导波计算，当入射 SH 波时，将会出现 SH 波在台阶两边来回传播。入射模态的振幅为 a，散射后的传播与非传播模态的振幅为 b。可以用矩阵来定义散射问题：

$$\begin{bmatrix} b_{\mathrm{l}} \\ b_{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\mathrm{l}} \\ a_{\mathrm{r}} \end{bmatrix} \tag{6.2.1}$$

式中，l 和 r 分别代表台阶左边和右边。如果考虑 n 种模态，则散射矩阵可以写为

$$\begin{bmatrix} b_{\mathrm{l},1} \\ b_{\mathrm{l},2} \\ \vdots \\ b_{\mathrm{l},n} \\ b_{\mathrm{r},1} \\ b_{\mathrm{r},1} \\ \vdots \\ b_{\mathrm{r},n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\mathrm{l},1} \\ a_{\mathrm{l},2} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{l},n} \\ a_{\mathrm{r},1} \\ a_{\mathrm{r},1} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{r},n} \end{bmatrix} \tag{6.2.2}$$

式中，$[S]$是 $n\times n$ 矩阵；$a_{\mathrm{l},j}$为台阶左边第 j 个入射模态的振幅。对于一般情况，两边都有入射波，可以根据实际情况继续简化方程。

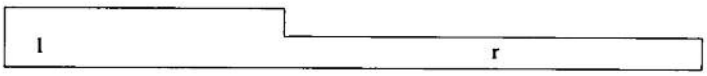


图 6.9 台阶形工件示意图

前面已经提到，为了求解散射问题，必须满足台阶边界条件。边界条件为，在自由面上应力为零，在界面处速度和应力函数连续。对于 SH 波来说，唯一的应力分量是 τ_{yx}，当材料性能参数已知时，可以用位移分量 u_y 推导 τ_{yx}。速度表达式也可以用 u_y 推导：

$$\tau_{yx}v = \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} \tag{6.2.3}$$

由于目前只需要考虑应力和位移的一个分量，因此可以忽略标记 y 和 z，将入射波的位移、应力和速度表示为

$$u_{\mathrm{l}}^{\mathrm{I}} = \sum_j a_{\mathrm{l},j}u_{\mathrm{l},j}\exp(\mathrm{i}(\omega t - k_{\mathrm{l},j}z)) \tag{6.2.4}$$

$$\tau_{\mathrm{l}}^{\mathrm{I}} = -\mathrm{i}c_{44}\sum_j k_{\mathrm{l},j}a_{\mathrm{l},j}u_{\mathrm{l},j}\exp(\mathrm{i}(\omega t - k_{\mathrm{l},j}z)) \tag{6.2.5}$$

$$v_{\mathrm{l}}^{\mathrm{I}} = \mathrm{i}\omega\sum_j a_{\mathrm{l},j}u_{\mathrm{l},j}\exp(\mathrm{i}(\omega t - k_{\mathrm{l},j}z)) \tag{6.2.6}$$

式中，$a_{\mathrm{l},j}$是台阶左边的第 j 阶入射模态；$u_{\mathrm{l},j}$是归一化后的位移；ω 是角频率；$k_{\mathrm{l},j}$是

复波矢。$u_{\mathrm{l}}^{\mathrm{S}}$、$\tau_{\mathrm{l}}^{\mathrm{S}}$、$v_{\mathrm{l}}^{\mathrm{S}}$ 和 $u_{\mathrm{l}}^{\mathrm{I}}$、$\tau_{\mathrm{l}}^{\mathrm{I}}$、$v_{\mathrm{l}}^{\mathrm{I}}$ 的表达式基本一样，只是波矢前面的符号不同，因为散射后左右两边的 SH 波传播方向相反。所以，利用相同的步骤可以得到右边的位移、应力和速度表达式。这样边界条件可以表示为

$$\mathrm{i}\omega u_{\mathrm{l}}^{\mathrm{I}}+\mathrm{i}\omega u_{\mathrm{l}}^{\mathrm{S}}=\mathrm{i}\omega u_{\mathrm{r}}^{\mathrm{I}}+\mathrm{i}\omega u_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}},\quad x<t_0 \tag{6.2.7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{\mathrm{l}}^{\mathrm{I}}+\tau_{\mathrm{l}}^{\mathrm{S}}=\tau_{\mathrm{r}}^{\mathrm{I}}+\tau_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}},\quad x<t_0\\&\tau_{\mathrm{l}}^{\mathrm{I}}+\tau_{\mathrm{l}}^{\mathrm{S}}=0,\quad x>t_0\end{aligned}\right\} \tag{6.2.8}$$

式中，t_0 为左右台阶的连接边界位置。在特征模态展开

$$\mathrm{i}\omega\sum_j a_{\mathrm{l},j}u_{\mathrm{l},j}+\mathrm{i}\omega\sum_j b_{\mathrm{l},j}u_{\mathrm{l},j}=\mathrm{i}\omega\sum_j a_{\mathrm{r},j}u_{\mathrm{r},j}+\mathrm{i}\omega\sum_j b_{\mathrm{r},j}u_{\mathrm{r},j},\quad x<t_0 \tag{6.2.9}$$

$$\left.\begin{aligned}&-\mathrm{i}C_{44}\sum_j k_{\mathrm{l},j}a_{\mathrm{l},j}u_{\mathrm{l},j}+\mathrm{i}C_{44}\sum_j k_{\mathrm{l},j}b_{\mathrm{l},j}u_{\mathrm{l},j}=\mathrm{i}C_{44}\sum_j k_{\mathrm{r},j}a_{\mathrm{r},j}u_{\mathrm{r},j}-\mathrm{i}C_{44}\sum_j k_{\mathrm{r},j}b_{\mathrm{r},j}u_{\mathrm{r},j},\\&\qquad\qquad x<t_0\\&-\mathrm{i}C_{44}\sum_j k_{\mathrm{r},j}a_{\mathrm{r},j}u_{\mathrm{r},j}+\mathrm{i}C_{44}\sum_j k_{\mathrm{r},j}b_{\mathrm{r},j}u_{\mathrm{r},j}=0,\quad x>t_0\end{aligned}\right\} \tag{6.2.10}$$

方程(6.2.9)和(6.2.10)已经包含散射问题的解，下面将进一步简化表达式，得到容易计算的简单矩阵形式。为了得到对任意厚度的板都适合的公式，将模态都进行功率归一化处理，得到功率流的显式表达式。在方程(6.2.9)中利用共轭复数，引入$\frac{1}{2}\mathrm{i}C_{44}k_{\mathrm{r},m}u_{\mathrm{r},m}$，并在板厚方向积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_j\omega C_{44}k_{\mathrm{r},m}a_{\mathrm{l},j}^{*}\int_0^{t_{\mathrm{r}}}u_{\mathrm{l},j}u_{\mathrm{r},m}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sum_j\omega C_{44}k_{\mathrm{r},m}b_{\mathrm{l},j}^{*}\int_0^{t_{\mathrm{r}}}u_{\mathrm{l},j}u_{\mathrm{r},m}\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{2}\sum_j\omega C_{44}k_{\mathrm{r},m}a_{\mathrm{r},j}^{*}\int_0^{t_{\mathrm{r}}}u_{\mathrm{r},j}u_{\mathrm{r},m}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sum_j\omega C_{44}k_{\mathrm{r},m}b_{\mathrm{r},j}^{*}\int_0^{t_{\mathrm{r}}}u_{\mathrm{r},j}u_{\mathrm{r},m}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

式中，上标“*”表示归一化后的值；a^* 为入射振幅；b^* 为散射振幅。引入归一化波矢 $Q_{\mathrm{r},m}=\frac{k_{\mathrm{r},m}}{k_0}$，得到简化表达式：

$$Q_{\mathrm{r},m}^{*}\sum_j L_{\mathrm{l},m}a_{\mathrm{l},j}+Q_{\mathrm{r},m}^{*}\sum_j L_{j,m}b_{\mathrm{l},j}=P_{\mathrm{r},m}^{*}a_{\mathrm{r},m}+P_{\mathrm{r},m}^{*}b_{\mathrm{r},m} \tag{6.2.12}$$

式中，k_0 是 SH_0 模态的波矢；$P_{\mathrm{r},m}$是能量流，对于传播模态 $P_{\mathrm{r},m}=1$，对于非传播模态 $P_{\mathrm{r},m}=-\mathrm{i}$；$L_{j,m}=\frac{1}{2}C_{44}\omega k_0\int_0^{t_{\mathrm{r}}}u_{\mathrm{l},j}u_{\mathrm{r},m}\mathrm{d}t$。

对方程(6.2.10)做类似处理，可以得到

$$\begin{aligned}&-\sum_j\frac{1}{2}\omega C_{44}k_{\mathrm{l},j}a_{\mathrm{l},j}\int_0^{t_{\mathrm{r}}}u_{\mathrm{l},j}u_{\mathrm{l},m}\mathrm{d}t+\sum_j\frac{1}{2}\omega C_{44}k_{\mathrm{l},m}b_{\mathrm{l},j}\int_0^{t_{\mathrm{r}}}u_{\mathrm{l},j}u_{\mathrm{l},m}\mathrm{d}t=\\&\sum_j\frac{1}{2}\omega C_{44}k_{\mathrm{r},j}a_{\mathrm{r},j}\int_0^{t_{\mathrm{r}}}u_{\mathrm{r},j}u_{\mathrm{l},m}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sum_j\omega C_{44}k_{\mathrm{r},j}b_{\mathrm{r},j}\int_0^{t_{\mathrm{r}}}u_{\mathrm{r},j}u_{\mathrm{l},m}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

引入功率流 P

$$\sum_j Q_{\mathrm{r},j}L_{m,j}a_{\mathrm{r},j}+Q_{\mathrm{r},j}\sum_j L_{m,j}b_{\mathrm{r},j}=-P_{\mathrm{l},m}a_{\mathrm{l},m}+P_{\mathrm{l},m}b_{\mathrm{l},m} \tag{6.2.14}$$

为了推导矩阵 S 元素，将式(6.2.12)和式(6.2.14)写为

$$|Q_{r,m}|\sum_j L_{j,m}b_{l,j}-b_{r,m}=-|Q_{r,m}|\sum_j L_{j,m}a_{l,j}-a_{r,m} \tag{6.2.15}$$

$$P_{l,m}b_{l,m}+\sum_j Q_{r,j}L_{m,j}b_{r,j}=P_{l,m}a_{l,m}+\sum_j Q_{r,j}L_{m,j}a_{r,j} \tag{6.2.16}$$

这样，就可以得到一个简单矩阵方程，并分离出 a 和 b：

$$[M_b]\begin{bmatrix}b_l\\b_r\end{bmatrix}=[M_a]\begin{bmatrix}a_l\\a_r\end{bmatrix} \tag{6.2.17}$$

该方程的解为

$$\begin{bmatrix}b_l\\b_r\end{bmatrix}=[M_b]^{-1}[M_a]\begin{bmatrix}a_l\\a_r\end{bmatrix} \tag{6.2.18}$$

式中，散射矩阵 S 为

$$[S]=[M_b]^{-1}[M_a] \tag{6.2.19}$$

利用模态分解法计算得到的上下台阶面上的反射系数和透射系数如图6.10～图6.13所示。假设板厚为5.5mm，台阶高度为板厚的一半，入射低频 SH_0 波。从

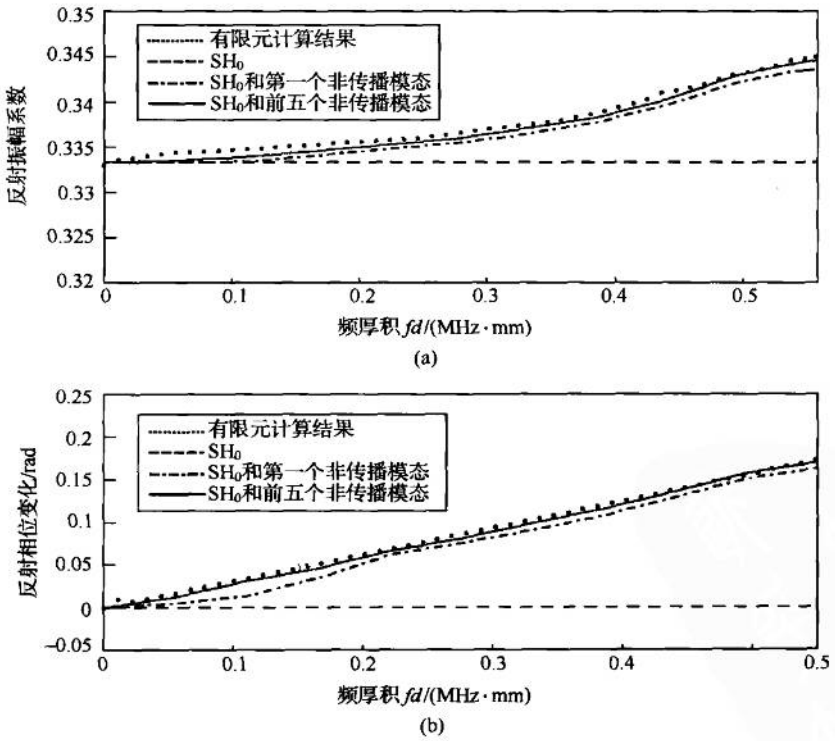


图 6.10 下台阶面反射系数振幅和相位

图 6.10(a)可以看到，在低频范围内，下台阶的反射系数振幅不随频率变化。图 6.10(b)和图 6.11(b)给出了下台阶面反射和透射信号的相位偏移，可以看到相位偏移与频率有关，而且呈单调关系。在零频率，反射和透射波的相位偏移都为零。对于上台阶面散射，透射波相位偏移为零(见图 6.12(b))，反射相位偏移为 π(见图 6.13(b))。

从图 6.10～图 6.13 中还可以看到，只需要考虑两个模态 SH_0 和 SH_1，忽略其他高阶模态，可以准确地模拟下台阶面散射后的反射系数和透射系数的振幅；对于反射系数和透射系数相位的计算，则需要另外考虑五种非传播模态的影响。

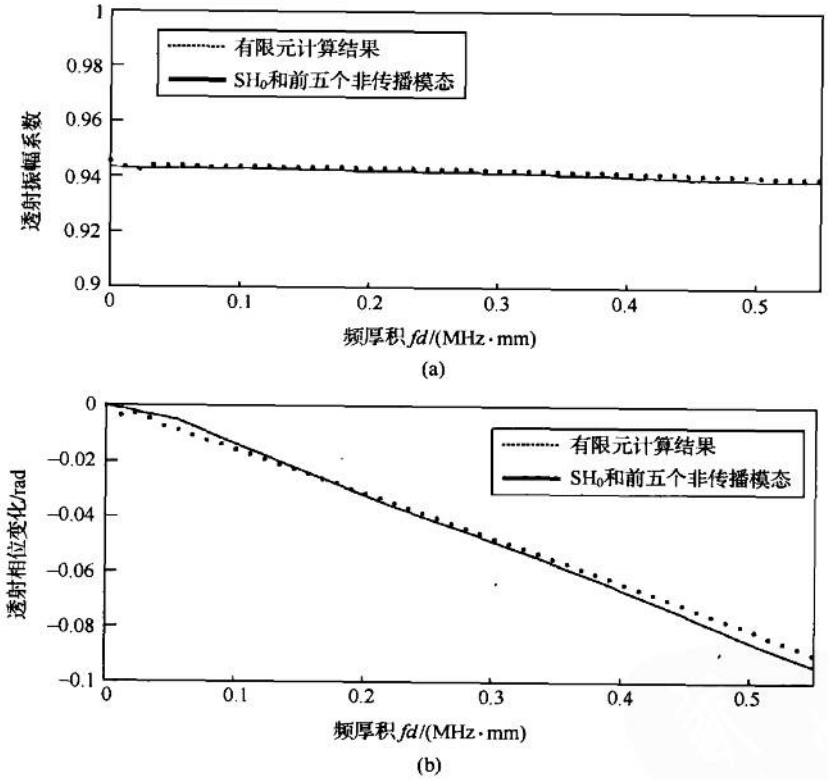
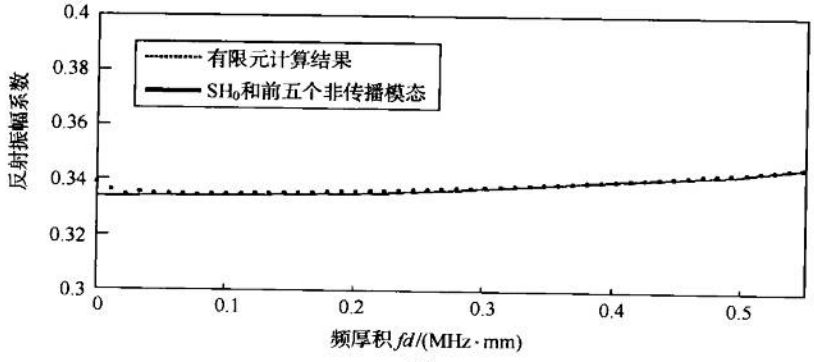
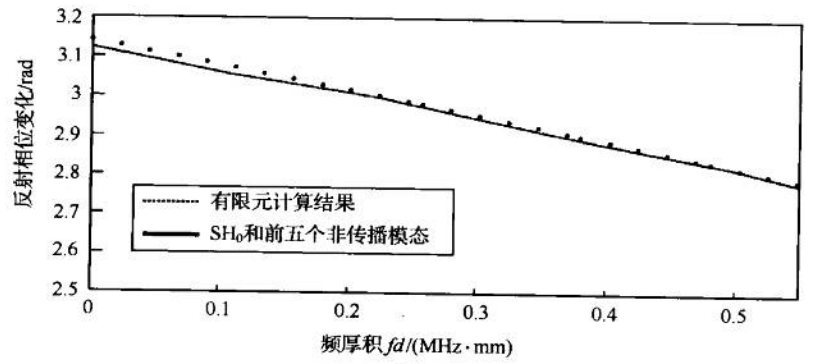


图 6.11 下台阶面透射系数振幅和相位

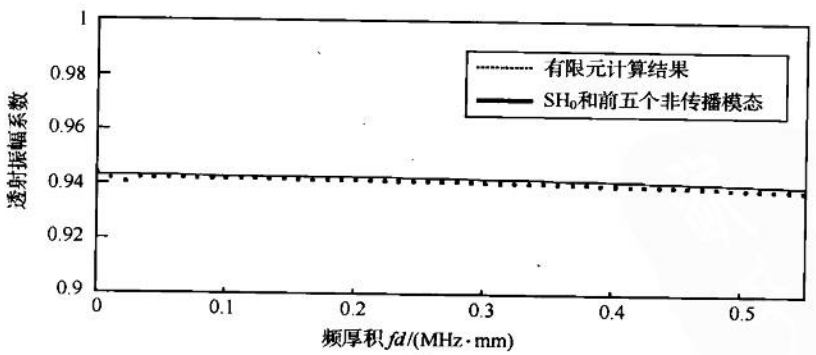


(a)

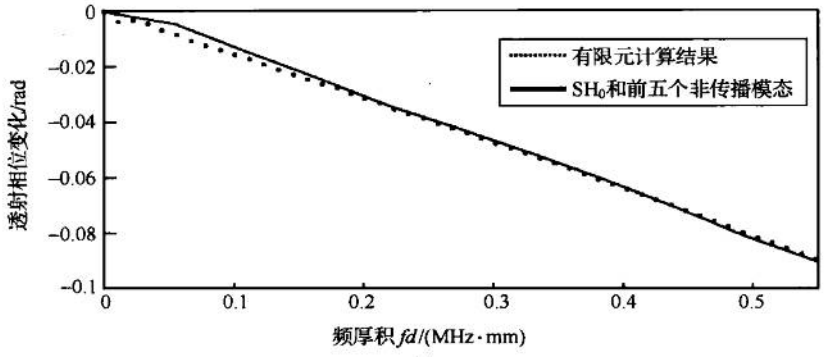


(b)

图 6.12 上台阶面反射系数振幅和相位



(a)



(b)

图 6.13 上台阶面透射系数振幅和相位

6.3 有限元法

有限元法计算导波声场的关键是准确地施加上下界面的边界条件并按照需求进行适当的网格划分。有限元计算导波声场的优势在于可以处理不规则波导截面等相对复杂情况下的导波传播[3~5]。在计算过程中通常需要对介质进行三维网格划分，这会导致计算量大、对计算机内存要求高等问题，因此，针对具体的被检工件（如板、管道、铁轨等），一般尽可能寻求简化的模型（如采用二维网格划分、选择对称边界条件等）。

6.3.1 板导波

薄板检测常用的导波模态有对称兰姆波 S_0、反对称兰姆波 A_0 和水平剪切波 SH_0。

1. A_0 波在薄板终端的反射

A_0 波在表面平直的板中的传播可以用二维空间离散来模拟。网格单元选用四节点的矩形单元，每个节点都有两个位移自由度。为了保证计算精度，网格单元散必须满足：

$$\lambda_{\min} \geqslant 8\Delta x \tag{6.3.1}$$

式中，$\lambda_{\min}$ 是介质中传播的所有波的最小波长；Δx 是介质中所有网格单元的最大尺寸。

有限元程序采用三角质量矩阵，时间步进显式算法。为了保证算法的稳定性，时间步长必须满足

$$\delta t \leqslant 0.8\frac{\Delta s}{c} \tag{6.3.2}$$

式中，c 是波速；Δs 是最小单元边长。

利用二维有限元法计算板中导波声场，介质网格划分和边界条件施加如图 6.14 所示。板厚为 8mm，在厚度方向划分为 16 个单元，单元为正方形。根据前面的要求，每个波长内有 8 个单元，也就是说当频厚积为 1MHz · mm 时，每个波长内要有 37 个单元；当频厚积为 2.7MHz · mm 时，每个波长内要 20 个单元。

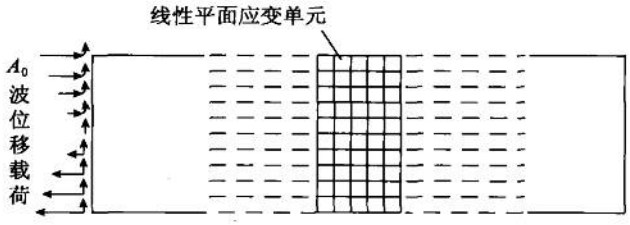


图 6.14 板中导波有限元计算网格划分示意图

当频厚积为 1MHz · mm 时，在板的端部施加一个 10 周期汉宁窗的激励信号，可通过对端面上的点施加与板表面垂直和平行的位移来实现。模型长度为 800mm，分布选取板的末端、距离末端 300mm 和 200mm 的位置监测入射和反射的 A_0 波。为了观察反射得到的非传播模态，从末端开始，每隔 0.5mm 监测一次。

当频率积为 2.7MHz · mm 时，反射后会出现 A_1 模型的反对称兰姆波，将会和 A_0 模态一起传播，由于两种模态的相速度很相近，信号很难分离，必须选取更长的模型，因此模型长度设为 4m。信号为 30 周期汉宁窗的激励信号，施加方式与 1MHz · mm 相同。同时也必须严格按照模态要求对节点施加初始位移，防止在发射过程中出现 A_1 波。在距离板末端 3m 和 3.2m 的位置对入射和反射信号进行监测。图 6.15 为计算得到的，可以看到，在距离板末端 3.2m 位置的波形图，A_0 和 A_1 模态已经被分开。

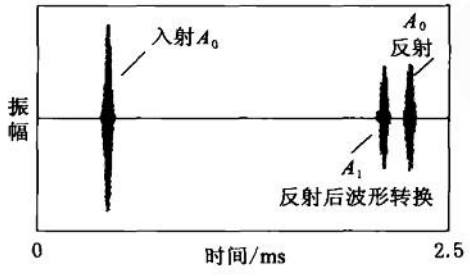
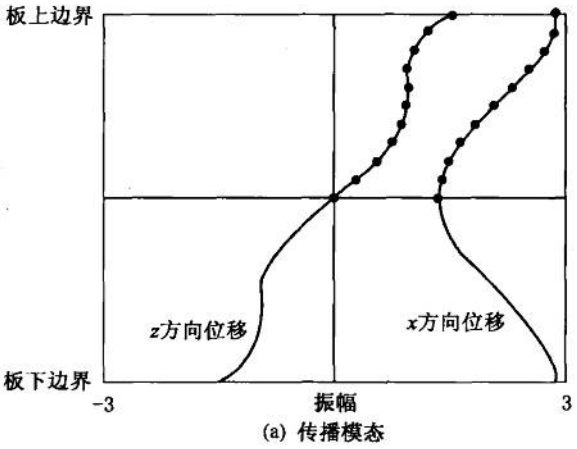
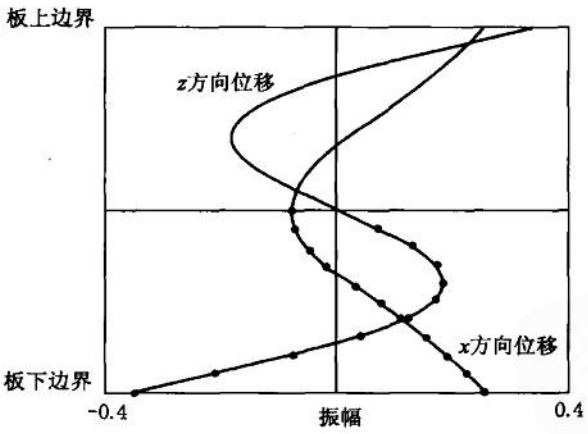


图 6.15 距离板末端 3.2m 位置得到的波形图

图 6.16 为有限元法计算得到的板末端位移场与解析法对比图，可以看到两种方法的模拟结果非常吻合。图 6.16(a)为入射 A_0、反射 A_0 和反射 A_1 叠加得到的位移图，图 6.16(b)为移出这三种模态后，剩下的非传播模态波的位移场，可以看到当以高于 A_1 截止频率发射 A_0 波时，板的末端出现的反射模态比较复杂，图 6.16(b)中的位移场可能由 A_2 和 A_3 模态叠加而成。



(a) 传播模态



(b) 非传播模态

图 6.16 板末端位移场与解析法对比图

2. S_0 波与板中圆孔的作用

S_0 是兰姆波一个比较好的检测模态，在板的末端反射之后不会产生非传播模态波。下面用有限元法计算 S_0 模态导波在板介质中圆孔缺陷处的反射，计算模型

如图 6.17 所示，圆孔为通孔，位于板中心，板长选择 600mm 和 1200mm，板的尺寸要保证能将入射信号和反射信号在时间上分离。网格划分采样二维薄膜模型，网格单元为薄膜单元，四节点，每个节点有两个位移自由度。圆孔的模拟是通过移出单元法，将网格单元移出得到。时间步长和空间步长必须满足式(6.3.1)和式(6.3.2)。为了观测反射后是否出现 SH_0，最小波长选择 SH_0 的波长。网格单元尺寸为 3mm。利用对称边界条件，则只需要计算一半空间，如图 6.17 所示。激励信号为五周期，加汉宁窗的正弦信号，频率为 100kHz。

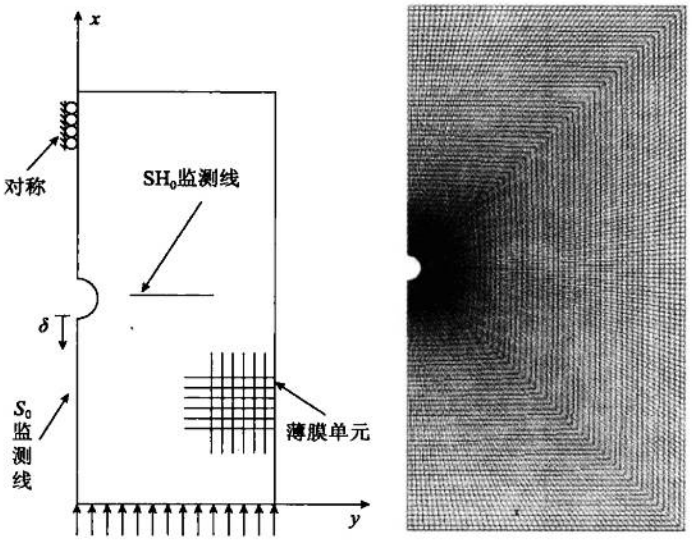


图 6.17 板结构及有限元网格划分示意图

在距离孔边缘 390mm 位置监测信号，得到入射和反射 S_0 模态波如图6.18(a)所示，在 y 轴方向距离圆孔边缘 390mm 位置监测信号，得到 SH_0 反射波如图6.18(b)所示，直径为 114mm。可以看到，入射波和反射波信号被有效分离，有利

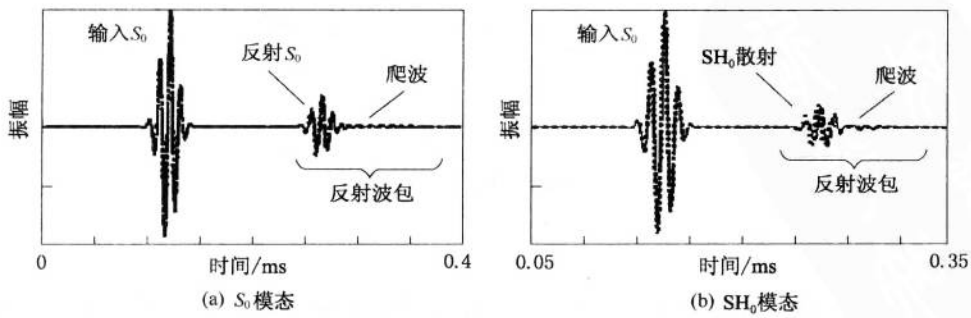


图 6.18 反射信号图

于反射系数的计算，而且在反射信号中还观察到爬波信号。

6.3.2 管导波

管道检测常用导波模态有 $L(0,1)$、$L(0,2)$和 $T(0,1)$。在进行有限元计算时，为了减少计算量，一般尽可能使用简化模型，管道检测模拟常用三种模型。

1. 薄膜模型(membrane)

薄膜模型利用薄膜单元来对管道的几何形状进行网格划分。薄膜单元描述一种二维平面矩形区域，基于平面应变理论模拟平面上的应力(两个正交应力和一个剪切应力)，即当对平面区域施加应力时，板的厚度改变。虽然从形状和性能上，薄膜模型是一个二维模型，但是可以用于三维计算，因为薄膜单元在三维空间可以以任意取向放置。在三维计算中，单元节点有位移自由度，在任何坐标方向都有质量。该模型适用于缺陷周向长度小于管道圆周长度以及径向长度等于管道壁厚的情况。

现用薄膜模型对直径为 24 in[①]，长 3.6m 的管道进行模态分析，利用等尺寸的四方形薄膜单元进行网格划分：长度方向划分 900 个单元，周向划分 40 个单元，每个单元是 4mm×3mm。零长度切槽(裂纹)用非连续相邻单元模拟，虽然切槽单元的两边是共节点，但为非连续的。非零长度的矩形切槽用移出单元来模拟。为了减少计算量，利用对称边界条件，则只需要计算一半空间。

轴对称模态的激发用在管道终端的所有节点施加相等的切向位移来实现。在接受多模态反射信号时，在所有观测点施加切向位移，即可提取出 0 阶模态。在每个信号叠加之间施加一个相位延迟 $\theta/(2\pi)$，即可提取出 1 阶模态，其中 θ 是距离切槽中心的角度距离。理论上，在高频范围可以得到三个 0 阶($L(0,1)$、$L(0,2)$、$T(0,1)$)，三个 1 阶($F(1,1)$、$F(1,2)$、$F(1,3)$)。然而 $L(0,1)$和 $L(0,2)$是纵向振动的，在这里并没有激励，而 $F(1,1)$不在薄膜模型中传播，因为它表示全壁厚的弯曲行为。所以在大多数情况下，上述处理技术已经足够用于提取和识别 $T(0,1)$、$F(1,2)$、$F(1,3)$模态。在相同频率下，$F(1,2)$和 $F(1,3)$模态有相似的群速度，所以在时域上很难区分，通常在频域采用窄带脉冲来进行区分。

利用薄膜模型计算得到 24in管道中典型的时域波形图如图 6.19 所示。缺陷周向长度为管道周长的 25%，入射波是频率为 50kHz 的 $T(0,1)$模态导波。图 6.19(a)是处理得到的 0 阶模态，从图中可以看到反射波为 $T(0,1)$模态；图 6.19(b)是处理得到的 1 阶模态，可以看到反射波为 $F(1,2)$模态，图 6.19(b)中

① 1in=2.54cm。

$T(0,1)$模态的入射波消失，因为采用的是得到 1 阶模态的处理技术。

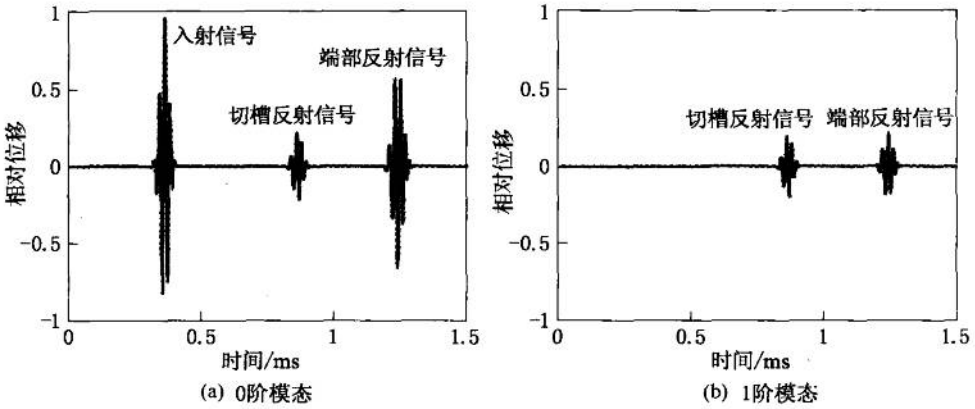


图 6.19 薄膜模型计算得到管道中导波模态

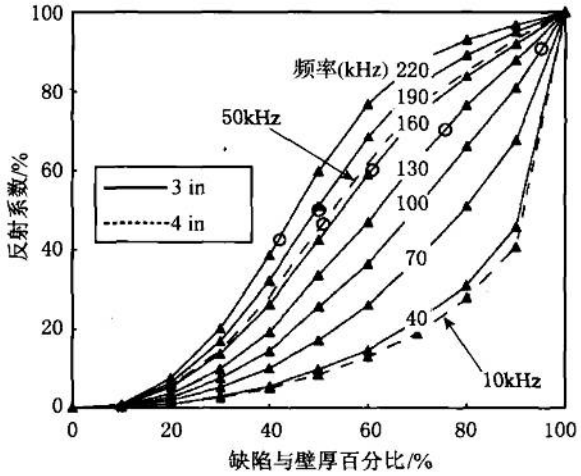
2. 轴对称模型(axi-symmetric)

轴对称模型用一种二维区域单元来表示轴对称结构的径向轴截面，模拟三个平面应力(径向、轴向的正应力和剪切应力)和一个周向应力。单元的径向位移与周向应力相关，所以该模型要求被模拟的结构必须是轴对称的，缺陷也必须是轴对称的，适用于缺陷周向长度等于管道圆周长度及径向长度小于管道壁厚的情况。在计算过程中不会出现不同周向阶次模态的转换，在工作频率范围内，只会出现$T(0,1)$这一种反射模态。

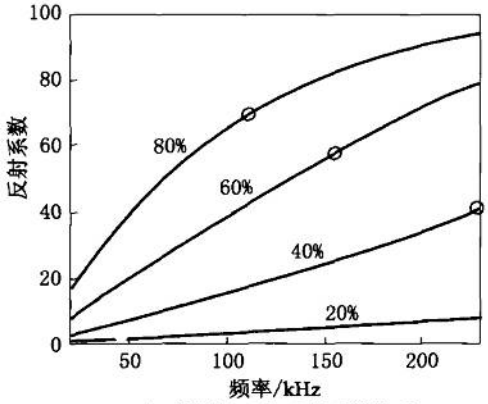
现用轴对称模型计算管道检测 $T(0,1)$模态导波反射系数，网格单元为四节点等尺寸四方形轴对称单元。对于不同规格的管道，具体的网格划分如下：管道外径为 24in，长度为 2.4m，在长度方向划分 1000 个单元，在周向划分 10 个单元，单元尺寸 2.4mm×2mm；管道外径为 3in，长度为 2.4m，在长度方向划分 2000 个单元，在周向划分 10 个单元，单元尺寸 1.2mm×0.55mm。缺陷深度设为壁厚的 80%、60%、40%和 20%，探头发射频率设为 150kHz 和 240kHz，为了防止 $T(0,2)$模态的影响，选择频率必须小于其截止频率(300kHz)。利用移出单元法来模拟切槽。当切槽轴向长度足够长时，可以将切槽始端反射和终端反射分离。

利用轴对称模型计算得到的各种检测参数与反射系数的关系如图 6.20 所示。图 6.20(a)为外径为 3in 和 24in 管道在各种检测频率下 $T(0,1)$波的反射系数随缺陷高度变化曲线。可以看到反射系数与缺陷高度呈非线性关系，随着频率的增加，缺陷凹度增加，在小尺寸范围，反射系数的减小趋势严重。当频厚积相同时，反射系数相近，例如管道外径 3in、壁厚为 5.5mm、检测频率为 40kHz(即频厚积为 220kHz·mm)时的反射系数与管道外径 24in，壁厚为 20mm、检测频率为 10kHz

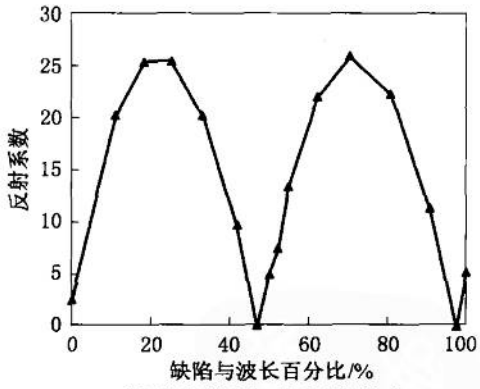
(即频厚积为 200kHz · mm)的反射系数相近。图 6.20(b)为外径 3in 管道在不同缺陷高度下 $T(0,1)$模态反射系数与频率的曲线,可以看到反射系数随着频率的增加而增加。图 6.20(c)为 $T(0,1)$模态反射系数与缺陷轴向长度的关系曲线,可以看到当轴向尺寸为 1/4 个波长时,反射系数最大,当轴向尺寸为 1/2 个波长时,反射系数最小。



(a) 缺陷高度与反射系数关系



(b) 检测频率与反射系数关系



(c) 缺陷长度与反射系数关系

图 6.20 各种参数与 $T(0,1)$模态反射系数的关系

3. 三维有限元模型

三维模型用八节点长方体单元来离散管道。长方体单元用来分段地描述整个结构的体积,所以可以模拟任意尺寸的缺陷,但其计算量大。对于非对称的结构,如缺陷尺寸和位置任意、工件为弯管结构等,只能用三维模型进行定量分析。

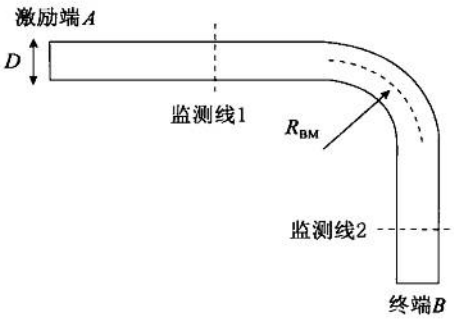


图 6.21 弯管结构示意图

下面用三维有限元模型进行如图 6.21 所示的弯管结构导波模态计算，弯管外径为 2in，弯管曲率与管道外径之比为 6，将弯管整体结构分为三个部分：弯管前的直管段、弯管后的直管段和弯管段。在管道终端 A 激励一个 $L(0,2)$ 信号，在两个位置监测信号，位置 1 监测弯管的反射信号，位置 2 监测弯管的透射信号。由于弯管结构为对称结构，则对称激励只会转换为对称模态，反对称激励只会产生反对称模态。

利用三维模型计算得到的激励、反射及透射模态信号如图 6.22 所示：图6.22(a)为在弯管前端产生 0 阶模态，即 $L(0,2)$ 的信号图；图 6.22(b)和图 6.22(c)分别为弯管段反射产生 1 阶和 2 阶模态的信号图，可以看到未出现 1 阶和 2 阶模态；图 6.22(d)入射模态 $L(0,2)$ 在弯管处透射后的信号图；图 6.22(e)和图 6.22(f)分别为透射后产生的 $F(1,3)$ 和 $F(2,3)$ 模态，可以看到 $F(2,3)$ 的振幅较小，在计算过程中可以忽略。

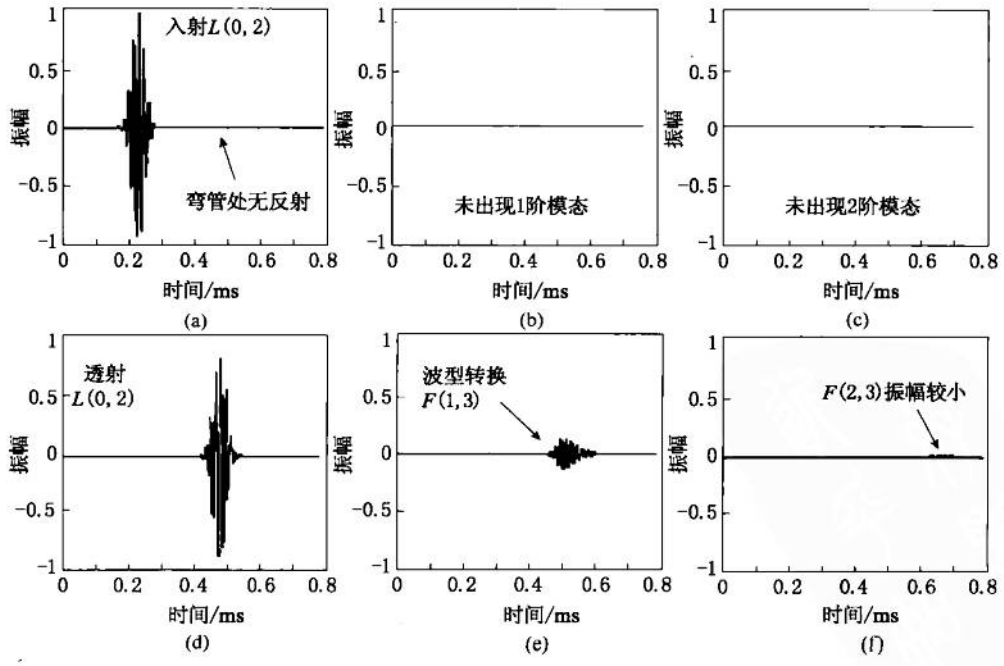


图 6.22 计算得到的反射透射信号图

通过以上计算分析，可以对 $L(0,2)$ 的传播过程做出如下解释：首先在管道终端激发 $L(0,2)$，然后沿直管段传播，到达弯管时，转换为两种弯管中的模态，记为模态 A 和模态 B。假设在 k 值较大的情况下，A 和 B 分别为环面结构中的 $L(0,2)_T$ 和 $F(1,3)_S$（T 表示非轴对称；S 表示对轴）。在离开弯管时，模态 A 和 B 转换为 $L(0,2)$ 和 $F(1,3)$，所有在离开弯管之后的 $L(0,2)$ 的信号为

$$L(0,2) = L(0,2)_{\mathrm{I}} + L(0,2)_{\mathrm{II}}$$

式中，$L(0,2)_{\mathrm{I}}$ 为由模态 A 转换得到；$L(0,2)_{\mathrm{II}}$ 由模态 B 转换得到。由于模态 A 和 B 的速度不同，不同的弯曲长度导致不同的时间延迟。对于给定的弯曲长度和曲率，时间延迟也是频率的函数。

6.3.3 复杂结构导波

现以铁轨导波检测计算为例，利用有限元软件 ABAQUS 进行复杂结构中导波计算及应用。火车铁轨中常出现的缺陷有表面磨损和近表面横向裂纹，其中近表面的横向裂纹是检测的重点。传统超声检测方法由于表面磨损缺陷对声束的反射而导致检测范围无法到达近表面的横向裂纹，常常引起漏检。由于表面磨损缺陷的截面积远远小于横向缺陷的截面积，因此可以利用超声导波进行铁轨检测。超声计算与分析可以帮助检测人员选择合适的导波检测频率和模态，研究铁轨尺寸、缺陷尺寸、激励位置对检测结果的影响。

图 6.23 为利用 ABAQUS 软件计算铁轨导波检测的模型。模型终端箭头表示施加的信号，六周向汉宁窗信号。网格尺寸为 $\lambda/8$，模型四个端角固定。分布选择中心频率为 30kHz、60kHz、100kHz、135kHz、175kHz、200kHz 的模态，计算得到导波在铁轨中的传播如图 6.24 所示。由于 ABAQUS 软件自身内存的问题，各种频率的模型的长度不一样。可以看到，在低频范围（30kHz 和 60kHz），能量分布在表面和近表面位置，而在高频范围（175kHz 和 200kHz），能量只集中在表面附近，这说明近表面横向裂纹检测应选择低频导波，而表面磨损缺陷检测则选择高频导波。

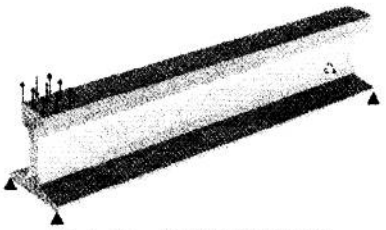


图 6.23 铁轨有限元模型

图 6.25 为导波在铁轨中传播及与缺陷相互作用的瞬态图。可以看到，导波在缺陷处的散射之后，分别有反向传播的反射波和向前传播的透射波。研究缺陷尺寸对反射系数和透射系数的影响，可用来进行缺陷的定量。

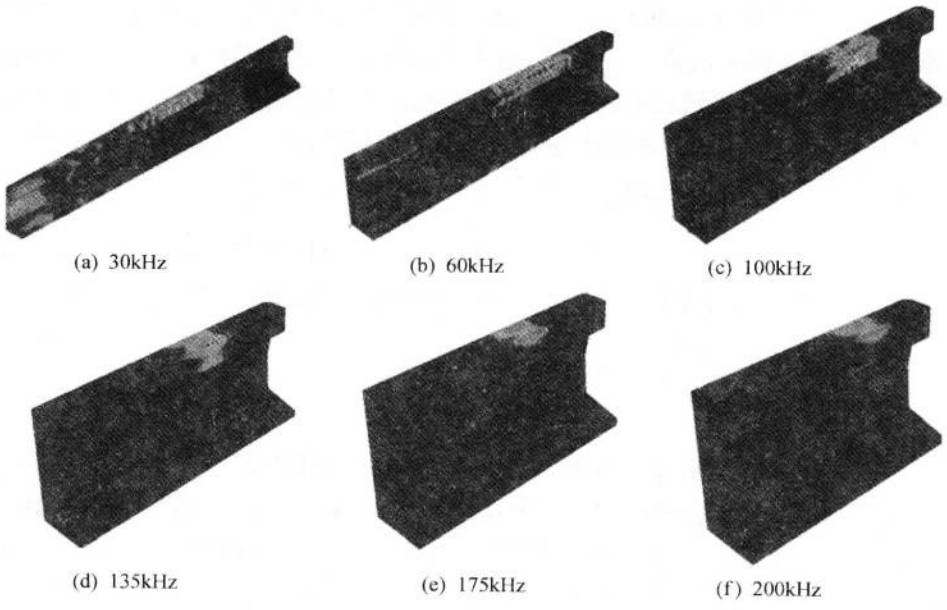


图 6.24 导波在铁轨中的传播

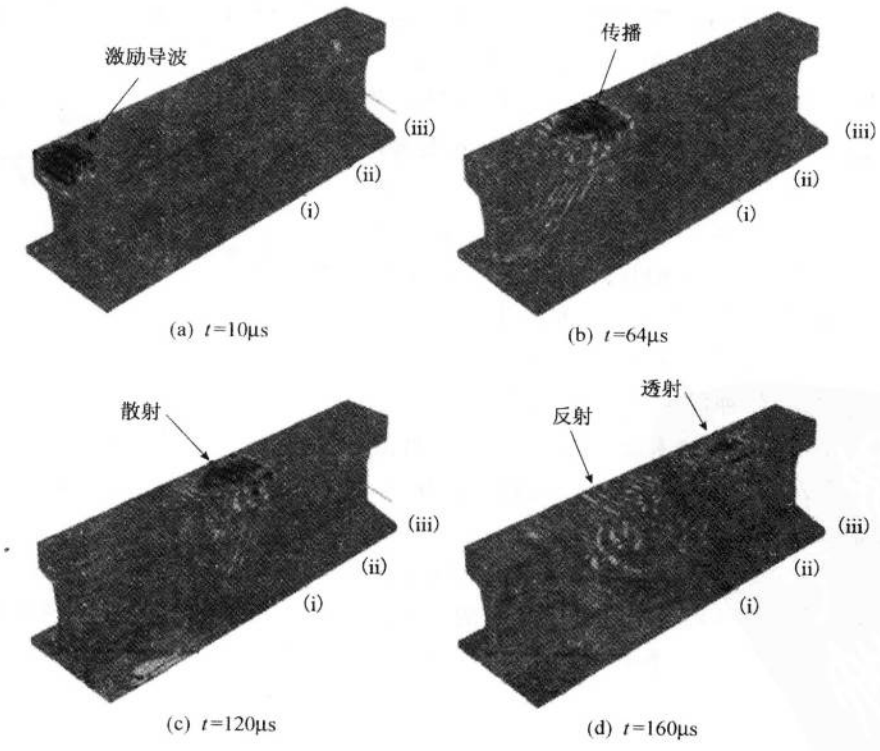


图 6.25 导波在铁轨中传播及与缺陷相互作用的瞬态图

6.4 边界元法

边界元法只需要在波导和结构的不连续或缺陷的边界划分网格节点，而不需要像有限元方法一样将波导划分为小体积网格单元并配置于整个求解域，因此边界元的计算效率高于有限元[6,7]。

由于边界元法主要用于处理波导介质不连续处的散射，而对于导波检测而言，介质中经常存在很多种导波模态，所以常常引入简正模态展开法和边界元法求解导波散射问题。简正模态展开的基本思想是将原函数展开成具有完备性和正交性的特征函数的叠加形式，特征函数的完备性是保证展开式的合理性，正交性用于求解展开后各项的振幅系数。

6.4.1 边界元法和简正模态展开法混合模型

以图 6.26 所示板结构模型为例，介绍边界元法和简正模态展开法的原理和应用。对于常规的边界元法，利用加权余量法，板中某一区域的弹性边界积分方程可以从波动方程推导得到

$$C_{ki}(\bar{\xi})u_i(\bar{\xi})+\int_{\Gamma}t_{ki}^{*}(\bar{\xi},\bar{\chi})u_i\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma}u_{ki}^{*}(\bar{\xi},\bar{\chi})t_i\mathrm{d}\Gamma \tag{6.4.1}$$

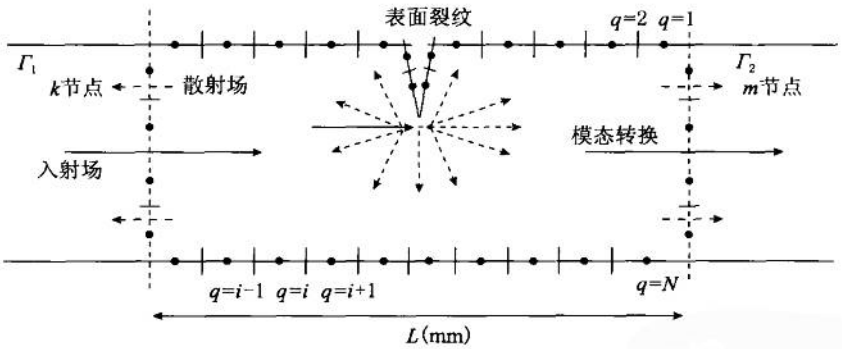


图 6.26 板结构边界元网格划分示意图

式中，Γ 表示积分边界，如果 Γ 光滑，则 $C_{ki}=1/2$；u_i 和 t_i 分别表示表面位移和应力；C_{ki} 为加权系数。傅里叶变换后的位移和应力解 u_{ki}^{*} 和 t_{ki}^{*} 可以写为

$$u_{ki}^{*}(\xi,\chi)=A(\overline{U}_1\delta_{ki}-\overline{U}_2r_{,k}r_{,i}) \tag{6.4.2}$$

$$t_{ki}^{*}(\xi,\chi)=GA\left\{\left[\left(\delta_{ki}\frac{\partial r}{\partial n}+n_kr_{,i}\right)+\frac{\lambda}{G}+n_ir_{,k}\right]\frac{\mathrm{d}\overline{U}_1}{\mathrm{d}r}\right.$$

$$-\left[\left(\delta_{ki}\frac{\partial r}{\partial n}+n_k r_{,i}\right)+2\left(n_i r_{,k}-2r_{,k}r_{,i}\frac{\partial r}{\partial n}\right)+\alpha\frac{\lambda}{G}n_i r_{,k}\right]\frac{\overline{U}_2}{r}$$

$$-\left(2r_{,k}r_{,i}\frac{\partial r}{\partial n}+\frac{\lambda}{G}n_i r_{,k}\right)\frac{\mathrm{d}\overline{U}_2}{\mathrm{d}r}\Bigg\} \tag{6.4.3}$$

式中，G 为边界总位移矢量积分项；U 为边界总位移矢量；δ_{ki} 为 δ 函数；n 为单位方向矢量；$r_{,k}$ 和 $r_{,i}$ 分别为位置矢量 r 为 k 和 i 方向的分量。

对于二维边界元模型，由点源到计算点的位置矢量 r，系数 α 和 A 定义如下：

$$|\bar{r}|=|\bar{\xi}-\bar{\chi}|,\quad \alpha=1,\quad A=\mathrm{i}/4G$$

式(6.4.2)和式(6.4.3)中的基本矢量为

$$\overline{U}_1=\mathrm{H}_0^{(1)}(k_\mathrm{T}r)-\frac{1}{k_\mathrm{T}r}\mathrm{H}_1^{(1)}(k_\mathrm{T}r)+\left(\frac{k_\mathrm{L}}{k_\mathrm{T}}\right)^2\frac{1}{k_\mathrm{L}r}\mathrm{H}_1^{(1)}(k_\mathrm{L}r) \tag{6.4.4}$$

$$\overline{U}_2=-\mathrm{H}_2^{(1)}(k_\mathrm{T}r)+\left(\frac{k_\mathrm{L}}{k_\mathrm{T}}\right)^2\mathrm{H}_2^{(1)}(k_\mathrm{L}r) \tag{6.4.5}$$

式中，k_L 和 k_T 分别为纵波波矢和横波波矢；$\mathrm{H}_1^{(1)}$ 和 $\mathrm{H}_2^{(1)}$ 别为一阶和二阶的第一类汉克尔函数。

将边界 Γ 离散成 N 个单元，如图 6.26 所示，则得到离散方程：

$$\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{2q-1}\\ u_{2q}\end{bmatrix}=\sum_{q=1}^{N}\int_{\Gamma_q}\begin{bmatrix}u^*_{2p-1,2q-1} & u^*_{2p-1,2q}\\ u^*_{2p,2q-1} & u^*_{2p,2q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{2q-1}\\ t_{2q}\end{bmatrix}\mathrm{d}\Gamma_q$$

$$-\sum_{q=1}^{N}\int_{\Gamma_q}\begin{bmatrix}t^*_{2p-1,2q-1} & t^*_{2p-1,2q}\\ t^*_{2p,2q-1} & t^*_{2p,2q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{2q-1}\\ u_{2q}\end{bmatrix}\mathrm{d}\Gamma_q \tag{6.4.6}$$

式中，$p=(1,2,\cdots,N)$ 分别利用高斯平方差求得对角常规数值积分，利用柯西值求对角奇异积分。方程(6.4.6)可以用矩阵形式表达

$$HU=GT \tag{6.4.7}$$

式中，U 和 T 是边界总位移和总应力矢量；H 和 G 为边界总位移和总应力矢量的积分项。

在弹性介质中，沿着 x_1 轴正方向传播的第 p 模态的导波入射位移场 u^1 可以分别用归一化系数 α^p 及归一化位移函数 u^p 和波矢 k^p 表示

$$u^\mathrm{I}=u^p=\alpha^p\bar{u}^p=\alpha^p\begin{bmatrix}\bar{u}^p_{x_1}\\ \bar{u}^p_{x_2}\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^p x_1} \tag{6.4.8}$$

归一化的模态位移和应力函数可以用兰姆波传播的边值问题得到。兰姆对称和反对称模态的函数如下：

对称模态

$$\bar{u}_{x1}=\frac{u_{x1}}{A_1}=(\mathrm{i}k\cos k_\mathrm{L}x_2+k_\mathrm{T}\alpha\cos k_\mathrm{T}x_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1-\omega t)} \tag{6.4.9}$$

$$\bar{u}_{x2}=\frac{u_{x2}}{A_1}=(-\mathrm{i}k_{\mathrm{L}}\cos k_{\mathrm{L}}x_2-\mathrm{i}k\alpha\sin k_{\mathrm{T}}x_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1-\omega t)} \tag{6.4.10}$$

$$\bar{\sigma}_{x_1x_1}=\frac{\sigma_{x_1x_2}}{A_1}=\{[-\lambda(k^2+k_{\mathrm{L}}^2)-2Gk^2]\cos k_{\mathrm{L}}x_2+2Gikk_{\mathrm{T}}\alpha\cos k_{\mathrm{T}}x_2\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1-\omega t)} \tag{6.4.11}$$

$$\bar{\sigma}_{x_1x_2}=\frac{\sigma_{x_1x_2}}{A_1}=[-2Gikk_{\mathrm{L}}\sin k_{\mathrm{L}}x_2+G(k^2-k_{\mathrm{T}}^2)\alpha\sin k_{\mathrm{T}}x_2]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1-\omega t)} \tag{6.4.12}$$

反对称模态

$$\bar{u}_{x_1}=\frac{u_{x_1}}{A_2}=(\mathrm{i}k\sin k_{\mathrm{L}}x_2+k_{\mathrm{T}}\beta\sin k_{\mathrm{T}}x_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1-\omega t)} \tag{6.4.13}$$

$$\bar{u}_{x_2}=\frac{u_{x_2}}{A_2}=(k_{\mathrm{L}}\cos k_{\mathrm{L}}x_2-\mathrm{i}k\beta\cos k_{\mathrm{T}}x_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1-\omega t)} \tag{6.4.14}$$

$$\bar{\sigma}_{x_1x_1}=\frac{\sigma_{x_1x_2}}{A_2}=\{[-\lambda(k^2+k_{\mathrm{L}}^2)-2Gk^2]\sin k_{\mathrm{L}}x_2-2Gikk_{\mathrm{T}}\phi\cos k_{\mathrm{T}}x_2\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1-\omega t)} \tag{6.4.15}$$

$$\bar{\sigma}_{x_1x_2}=\frac{\sigma_{x_1x_2}}{A_2}=[2Gikk_{\mathrm{L}}\cos k_{\mathrm{L}}x_2+G(k^2-k_{\mathrm{T}}^2)\beta\cos k_{\mathrm{T}}x_2]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1-\omega t)} \tag{6.4.16}$$

式中，归一化系数为

$$\alpha=\frac{A_4}{A_1}=\frac{2\mathrm{i}kk_{\mathrm{L}}\sin k_{\mathrm{L}}d}{(k^2-k_{\mathrm{T}}^2)\sin k_{\mathrm{T}}d} \tag{6.4.17}$$

$$\beta=\frac{A_3}{A_2}=\frac{-2\mathrm{i}kk_{\mathrm{L}}\cos k_{\mathrm{L}}d}{(k^2-k_{\mathrm{T}}^2)\cos k_{\mathrm{T}}d} \tag{6.4.18}$$

第 n 个传播模态的归一化模态函数可以用计算模态和入射模态的平均能量流的平方根计算：

$$\bar{U}_{x_1}^n=N_I^n\times\bar{u}_{x_1}^n \tag{6.4.19}$$

$$\bar{U}_{x_2}^n=N_I^n\times\bar{u}_{x_2}^n \tag{6.4.20}$$

式中，N_I^n 为归一化系数。平均能量流为

$$N_I^n=\sqrt{\frac{\bar{P}_{x_1}^{\mathrm{I}}}{\bar{P}_{x_1}^{\mathrm{R}}}} \tag{6.4.21}$$

式中，$\bar{P}_{x_1}^{\mathrm{I}}$ 为入射模态，平均能量流；$\bar{P}_{x_1}^{\mathrm{R}}$ 为反射模态平均能量流。

$$\bar{P}_{x_1}=-\frac{1}{2}\mathrm{real}\left[\mathrm{i}\omega\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}(\bar{\sigma}_{x_1x_1}\bar{u}_{x_1}+\bar{\sigma}_{x_1x_2}\bar{u}_{x_2})\mathrm{d}x_2\right] \tag{6.4.22}$$

这样，归一化表面应力 t 可以用边界外法线矢量和应力模态函数计算。

在一定的频率下，由于散射面的模态转换，第 p 个入射模态的散射场在左右边界 Γ_1 和 Γ_2 上可能包含 J 和 L 个独立模态。这样，基于各向同性线弹性波导假

设，散射场可以表示为

$$u^{\mathrm{bs}} = \sum_{j=1}^{J} \beta^j \bar{u}^j = \sum_{j=1}^{J} \beta^j \begin{bmatrix} \bar{u}^j_{x_1} \\ \bar{u}^j_{x_2} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^j x_1} \tag{6.4.23}$$

$$u^{\mathrm{fs}} = \sum_{l=1}^{L} \beta^l \bar{u}^l = \sum_{l=1}^{L} \beta^l \begin{bmatrix} \bar{u}^l_{x_1} \\ \bar{u}^l_{x_2} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^l x_1} \tag{6.4.24}$$

式中，bs 和 fs 表示向后和向前散射；β^j 和 β^l 分布表示第 j 个反射模态和第 l 个透射模态。

总位移场可以定义为入射波和散射波的叠加：

$$u = u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{bs(fs)}} \tag{6.4.25}$$

分别将 Γ_1 和 Γ_2 离散成 k 和 m 个节点，如图 6.26 所示，可以得到

$$[u]^{\Gamma_1}_{2k\times 1} = [\bar{u}]^{\mathrm{I}}_{2k\times J}[\alpha^p \delta_{pj} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^j x_1}]_{J\times 1} + [\bar{u}]^{\mathrm{bs}}_{2k\times J}[\beta^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^j x_1}]_{J\times 1} \tag{6.4.26}$$

$$[u]^{\Gamma_2}_{2m\times 1} = [\bar{u}]^{\mathrm{I}}_{2m\times L}[\alpha^p \delta_{pl} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^l x_1}]_{L\times 1} + [\bar{u}]^{\mathrm{fs}}_{2m\times L}[\beta^l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^l x_1}]_{L\times 1} \tag{6.4.27}$$

式中

$$[\bar{u}]^{\mathrm{I,bs}} = \begin{bmatrix} \bar{u}^1_{x_1}(x_2^1) & \bar{u}^2_{x_1}(x_2^1) & \cdots & \bar{u}^j_{x_1}(x_2^1) & \cdots & \bar{u}^{J-1}_{x_1}(x_2^1) & \bar{u}^J_{x_2}(x_2^1) \\ \bar{u}^1_{x_2}(x_2^1) & \bar{u}^2_{x_2}(x_2^1) & \cdots & \bar{u}^j_{x_2}(x_2^1) & \cdots & \bar{u}^{J-1}_{x_2}(x_2^1) & \bar{u}^J_{x_1}(x_2^1) \\ \bar{u}^1_{x_1}(x_2^2) & \bar{u}^2_{x_1}(x_2^2) & \cdots & \bar{u}^j_{x_1}(x_2^2) & \cdots & \bar{u}^{J-1}_{x_1}(x_2^2) & \bar{u}^J_{x_1}(x_2^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{u}^1_{x_1}(x_2^k) & \bar{u}^2_{x_1}(x_2^k) & \cdots & \bar{u}^j_{x_1}(x_2^k) & \cdots & \bar{u}^{J-1}_{x_1}(x_2^k) & \bar{u}^J_{x_1}(x_2^k) \\ \bar{u}^1_{x_2}(x_2^k) & \bar{u}^2_{x_2}(x_2^k) & \cdots & \bar{u}^j_{x_2}(x_2^k) & \cdots & \bar{u}^{J-1}_{x_2}(x_2^k) & \bar{u}^J_{x_2}(x_2^k) \end{bmatrix}_{2k\times J}$$

$[\bar{u}]^{\mathrm{I,fs}}$ 也可以按同样的方式用 Γ_2 上的 m 和 L 来表示。

边界上的应力也可以定义为入射和反射场的归一化应力模态函数的线性叠加：

$$[t]^{\Gamma_1}_{2k\times 1} = [\bar{t}]^{\mathrm{I}}_{2k\times J}[\alpha^p \delta_{pj} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^j x_1}]_{J\times 1} + [\bar{t}]^{\mathrm{bs}}_{2k\times J}[\beta^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^j x_1}]_{J\times 1} \tag{6.4.28}$$

$$[t]^{\Gamma_2}_{2m\times 1} = [\bar{t}]^{\mathrm{I}}_{2m\times L}[\alpha^p \delta_{pl} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^l x_1}]_{L\times 1} + [\bar{t}]^{\mathrm{fs}}_{2m\times L}[\beta^l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^l x_1}]_{L\times 1} \tag{6.4.29}$$

式中

$$[\bar{t}]^{\mathrm{I,bs}} = \begin{bmatrix} \bar{t}^1_{x_1}(x_2^1) & \bar{t}^2_{x_1}(x_2^1) & \cdots & \bar{t}^j_{x_1}(x_2^1) & \cdots & \bar{t}^{J-1}_{x_1}(x_2^1) & \bar{t}^J_{x_2}(x_2^1) \\ \bar{t}^1_{x_2}(x_2^1) & \bar{t}^2_{x_2}(x_2^1) & \cdots & \bar{t}^j_{x_2}(x_2^1) & \cdots & \bar{t}^{J-1}_{x_2}(x_2^1) & \bar{t}^J_{x_1}(x_2^1) \\ \bar{t}^1_{x_1}(x_2^2) & \bar{t}^2_{x_1}(x_2^2) & \cdots & \bar{t}^j_{x_1}(x_2^2) & \cdots & \bar{t}^{J-1}_{x_1}(x_2^2) & \bar{t}^J_{x_1}(x_2^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{t}^1_{x_1}(x_2^k) & \bar{t}^2_{x_1}(x_2^k) & \cdots & \bar{t}^j_{x_1}(x_2^k) & \cdots & \bar{t}^{J-1}_{x_1}(x_2^k) & \bar{t}^J_{x_1}(x_2^k) \\ \bar{t}^1_{x_2}(x_2^k) & \bar{t}^2_{x_2}(x_2^k) & \cdots & \bar{t}^j_{x_2}(x_2^k) & \cdots & \bar{t}^{J-1}_{x_2}(x_2^k) & \bar{t}^J_{x_2}(x_2^k) \end{bmatrix}_{2k\times J}$$

$[\bar{t}]^{\mathrm{I,bs}}$ 也可以按同样的方式用 Γ_2 上的 m 和 L 来表示。

利用散射振幅 β^j 和 β^l 重写式(6.4.26)和式(6.4.27)：

$$[\beta^j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^j x_1}]_{J\times 1} = [\bar{u}^{-1}]^{\mathrm{bs}}_{L\times 2k}[u]^{\Gamma_1}_{2k\times 1} - [\bar{u}^{-1}]^{\mathrm{bs}}_{J\times 2k}[\bar{u}]^{\mathrm{I}}_{2k\times J}[\alpha^p \delta_{pl} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^l x_1}]_{J\times 1} \tag{6.4.30}$$

$$[\beta^l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^l x_1}]_{L\times 1} = [\bar{u}^{-1}]^{\mathrm{fs}}_{L\times 2m}[u]^{\Gamma_2}_{2m\times 1} - [\bar{u}^{-1}]^{\mathrm{fs}}_{L\times 2m}[\bar{u}]^{\mathrm{I}}_{2m\times L}[\alpha^p \delta_{pl} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^l x_1}]_{L\times 1} \tag{6.4.31}$$

式中，$[\bar{u}^{-1}]$表示$[\bar{u}]$的正则化复逆矩阵；$[\bar{u}^{-1}]=([\bar{u}^*]^{\mathrm{T}}[\bar{u}])^{-1}[\bar{u}^*]^{\mathrm{T}}$，$[\bar{u}^*]^{\mathrm{T}}$表示$[\bar{u}]$的复共轭矩阵。

将式(6.4.30)和式(6.4.31)带入式(6.4.28)和式(6.4.29)，得

$$[t]^{\Gamma_1}_{2k\times 1} = [\bar{t}]^{\mathrm{I}}_{2k\times J}[\alpha^p \delta_{pj} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^j x_1}]_{J\times 1} + [\bar{t}]^{\mathrm{bs}}_{2k\times J}[\bar{u}^{-1}]^{\mathrm{bs}}_{J\times 2k}[u]^{\Gamma_1}_{2k\times 1} - [\bar{t}]^{\mathrm{bs}}_{2k\times J}[\bar{u}^{-1}]^{\mathrm{bs}}_{J\times 2k}[\bar{u}]^{\mathrm{I}}_{2k\times J}[\alpha^p \delta_{pj} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^j x_1}]_{J\times 1} \tag{6.4.32}$$

$$[t]^{\Gamma_2}_{2m\times 1} = [\bar{t}]^{\mathrm{fs}}_{2m\times L}[\bar{u}^{-1}]^{\mathrm{fs}}_{L\times 2m}[u]^{\Gamma_2}_{2m\times 1} \tag{6.4.33}$$

最后得到波导左右边界上边界应力和位移之间的 $2k$ 和 $2m$ 个关系式。将式(6.4.32)和式(6.4.33)带入式(6.4.7)，满足上下表面的自由应力条件，得到

$$[C]_{2N\times 1} = [A]_{2N\times 2N}[X]_{2N\times 1} \tag{6.4.34}$$

式中，$[C]$为常矢量；$[A]$是一个包含算子$[H]$和$[G]$的系数矩阵；$[X]$是一个未知位移矢量。当求得未知位移矢量后，就可得到散射场的振幅 β^j 和 β^l，利用散射振幅和入射振幅的比值得到反射系数和透射系数为系数：

$$R^{jp} = \frac{\beta^j}{\alpha^p} \tag{6.4.35}$$

$$T^{lp} = \frac{\beta^l}{\alpha^p} \tag{6.4.36}$$

6.4.2 应用实例

现用二维边界元法和简正模态展开法混合模型计算兰姆波在图 6.27 所示板结构表面开口缺陷处的反射系数，缺陷为椭圆形，开口尺寸分别为 0.3mm、6.35mm 和 12.7mm，板厚为 10mm。网格划分时，单元元尺寸选择小于 $\lambda/15$，其中 λ 为横波波长。为了忽略瞬逝波的影响，网格划分区域的长度必须为板厚的 10 倍。所有的简正模态具有不同的波结构和波矢。在距离缺陷几个波长的位置检测散射信号。利用 BEM 计算得到的 S_0 模态兰姆波入射到三种开口半椭圆缺陷的反射系数和透射系数与频率的关系曲线如图 6.28～图 6.30 所示，缺陷高度分别设置为板厚的 10%、30%、50%、70%和 90%。可以看到，兰姆波的系数频散特性严重。在高频范围内，反射系数和透射系数与缺陷高度无关。在低频范围内，随着缺陷深度的增加，三种缺陷的反射 S_0 模态信号的振幅单调递增，而透射 S_0 模态的信号的振幅单调递减。振幅单调变化的原因是 S_0 模态导波在低频范围时，板内的位移和应力场在板厚方向均匀分布。

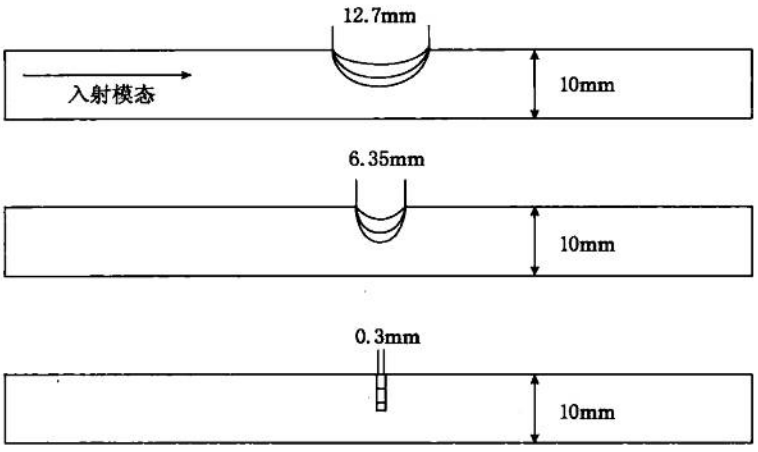
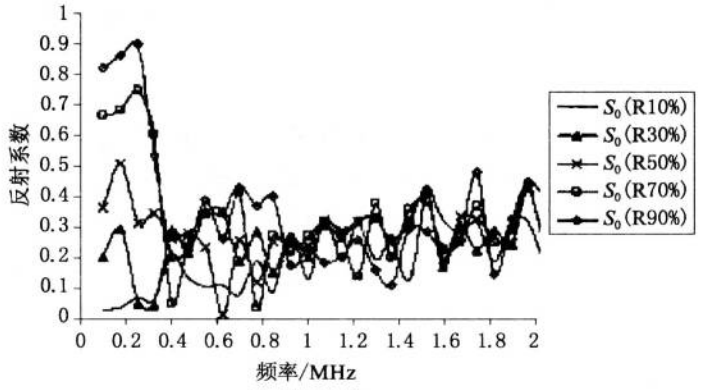
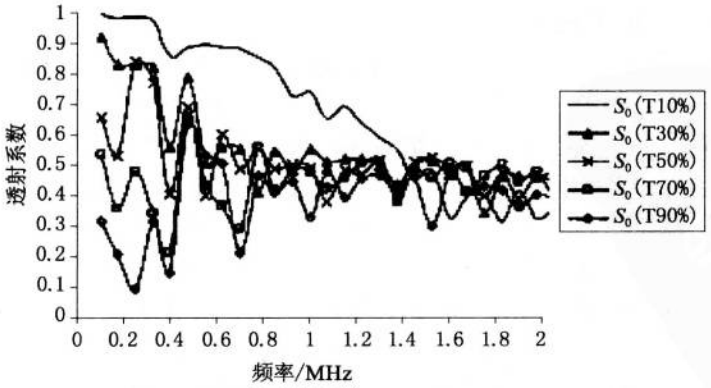


图 6.27 板结构和缺陷几何示意图

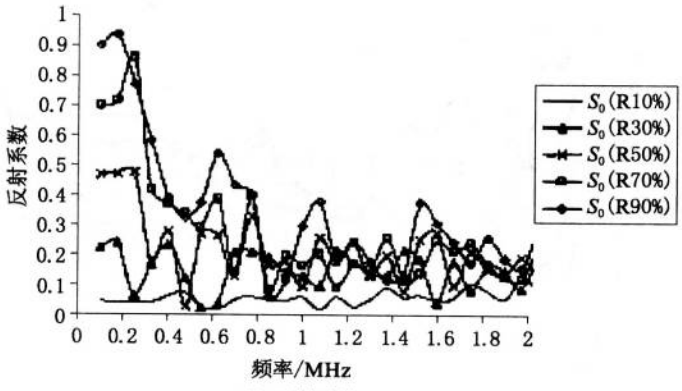


(a) 反射系数

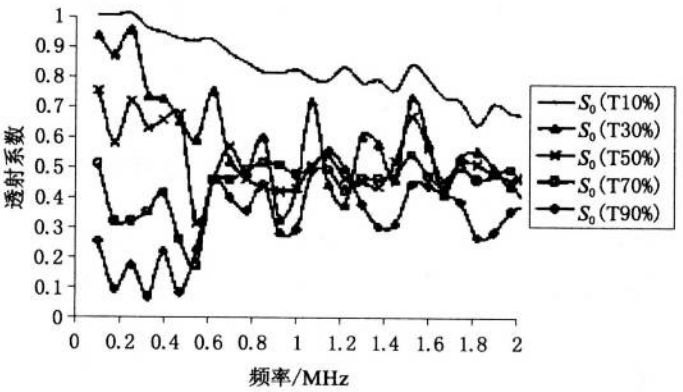


(b) 透射系数

图 6.28 开口尺寸为 0.3mm 缺陷的反射和透射系数

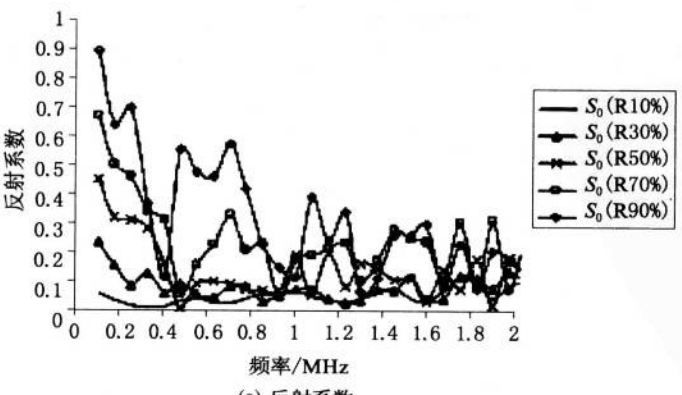


(a) 反射系数

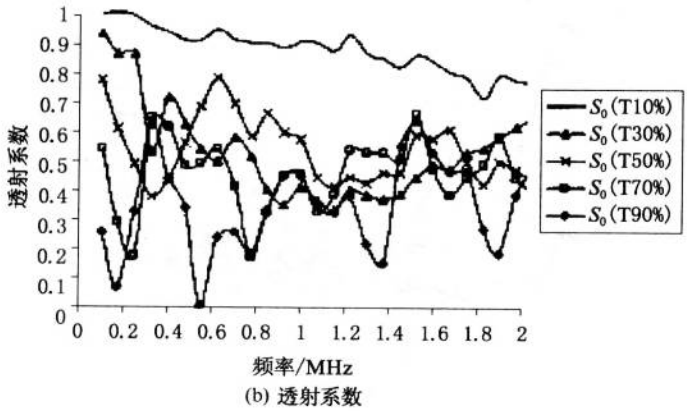


(b) 透射系数

图 6.29 开口尺寸为 6.35mm 缺陷的反射和透射系数



(a) 反射系数



(b) 透射系数

图 6.30 开口尺寸为 12.7mm 缺陷的反射和透射系数

6.5 半解析有限元法

半解析有限元法(semi-analytical finite element, SAFE)是为求解导波在结构材质复杂的介质中的频散问题的一种计算方法[8~10]。SAFE 假设导波以简谐方式沿着波导介质传播,这样只需要在波导截面上进行有限元网格划分,在传播方向上用简谐表达式表示波的传播,从而比有限元等方法具有更高的计算速度。采用有限单元的方法来描述截面,因此 SAFE 可以用于任意截面形状的波导介质,从而比简正模态法等解析法的应用更为广泛,而且只要采用复数刚度矩阵即可将 SAFE 的应用延伸到黏弹性介质。

6.5.1 SAFE 理论

对于如图 6.31 所示无限宽的板模型,位于 Oyz 平面的截面可以为任意形状。沿着 x 轴方向的波的波矢为 ξ,频率为 ω。波导介质可以是各向异性黏弹性材料。

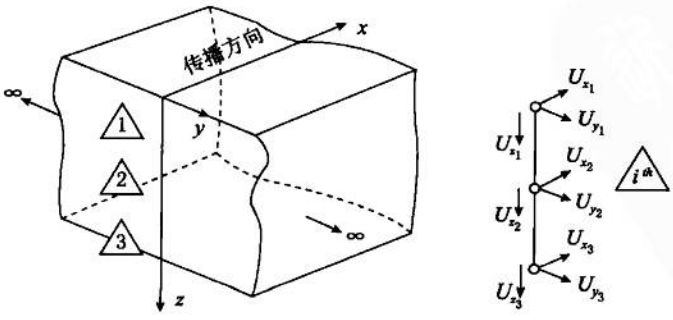


图 6.31 无限宽板模型

波导中每个点的简谐位移、应力和应变场分量可以表示为

$$u = [u_x \quad u_y \quad u_z]^{\mathrm{T}} \tag{6.5.1}$$

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{6.5.2}$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{6.5.3}$$

本构方程为 $\sigma = C\varepsilon$，对于黏弹性介质，C 为复数矩阵。应变和位移的关系为

$$\varepsilon = \left(L_x \frac{\partial}{\partial x} + L_y \frac{\partial}{\partial y} + L_z \frac{\partial}{\partial z}\right) u \tag{6.5.4}$$

式中

$$L_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.5.5}$$

波导介质的哈密顿变量在所有计算点处消失，即

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} \delta(\Phi - K)\mathrm{d}t = 0 \tag{6.5.6}$$

式中，Φ 为应变能，K 为动能。应变能可以表示为

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon^{\mathrm{T}} \tilde{C} \varepsilon \mathrm{d}V \tag{6.5.7}$$

该方程的解为复数，实部表示弹性能，虚部表示损耗能。动能表达式为

$$K = \frac{1}{2}\int_V \dot{u}^{\mathrm{T}} \rho \dot{u} \mathrm{d}V \tag{6.5.8}$$

将动能表达式带入式(6.5.4)，得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V \delta(\varepsilon^{\mathrm{T}}) \tilde{C} \varepsilon \mathrm{d}V + \int_V \delta(u^{\mathrm{T}}) \rho \ddot{u} \mathrm{d}V\right] \mathrm{d}t = 0 \tag{6.5.9}$$

假设传播方向 x 的位移场为简谐的，空间分布函数用来描述 Oyz 平面内截面位移场的振幅变化：

$$u(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} u_x(x,y,z,t) \\ u_y(x,y,z,t) \\ u_z(x,y,z,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_x(y,z) \\ U_y(y,z) \\ U_z(y,z) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x - \omega t)} \tag{6.5.10}$$

波导截面 Ω 可以划分成有限元单元 Ω_e。当使用一维单元时，利用常规方法离散 Ω。当使用二维单元，则需要借助 MATLAB 软件的 PDETOOL 和 GID 软件来划分网格。

离散单元的位移表达式可以用 x、y、z 方向的形状函数 $N_k(y,z)$ 和节点未知位移 (U_{xk}, U_{yk}, U_{zk}) 表示：

$$u^{(e)}(x,y,z,t)=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n}N_k(y,z)U_{xk}\\ \sum_{k=1}^{n}N_k(y,z)U_{yk}\\ \sum_{k=1}^{n}N_k(y,z)U_{zk}\end{bmatrix}^{(e)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x-\omega t)}=N(y,z)q^{(e)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x-\omega t)}\tag{6.5.11}$$

式中

$$N(y,z)=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & \cdots & N_n\\ N_1 & N_2 & \cdots & N_n\\ N_1 & N_2 & \cdots & N_n\end{bmatrix}\tag{6.5.12}$$

$$q^{(e)}=\begin{bmatrix}U_{x_1} & U_{y_1} & U_{z_1} & U_{x_2} & U_{y_2} & U_{z_2} & \cdots & U_{x_n} & U_{y_n} & U_{z_n}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{6.5.13}$$

其中，n 表示每个单元的节点数。单元的应变矢量可以写为节点位移的函数：

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(e)}&=\left(L_x\frac{\partial}{\partial x}+L_y\frac{\partial}{\partial y}+L_z\frac{\partial}{\partial z}\right)N(y,z)q^{(e)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x-\omega t)}\\&=(B_1+\mathrm{i}\xi B_2)q^{(e)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x-\omega t)}\end{aligned}\tag{6.5.14}$$

式中，L 由方程(6.5.5)给出，$B_1=L_yN_{,y}+L_zN_{,z}$，$B_2=L_xN_{,x}$，$N_{,y}$和$N_{,z}$分别为形状函数矩阵在 y 和 z 方向的导数。记截面单元数为 n_d，式(6.5.9)的哈密顿公式离散形式为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\bigcup_{e=1}^{n_{el}}\left[\int_{V_e}\delta(\varepsilon^{(e)\mathrm{T}})\tilde{C}\varepsilon^{(e)}\,\mathrm{d}V_e+\int_{V_e}\delta(u^{(e)\mathrm{T}})\rho_e\ddot{u}^{(e)}\,\mathrm{d}V_e\right]\right\}\mathrm{d}t=0\tag{6.5.15}$$

将式(6.5.14)带入式(6.5.15)的应变能项，结合适当的代数变形，得到

$$\begin{aligned}&\int_{V_e}\delta(\varepsilon^{(e)\mathrm{T}})\tilde{C}\varepsilon^{(e)}\,\mathrm{d}V_e\\&=\int_{\Omega_e}\int_x\delta[q^{(e)\mathrm{T}}(B_1^{\mathrm{T}}-\mathrm{i}\xi B_2^{\mathrm{T}})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x-\omega t)})^*]\tilde{C}_e(B_1+\mathrm{i}\xi B_2)q^{(e)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x-\omega t)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\Omega_e\\&=\int_{\Omega_e}\delta[q^{(e)\mathrm{T}}(B_1^{\mathrm{T}}-\mathrm{i}\xi B_2^{\mathrm{T}})]\tilde{C}_e(B_1+\mathrm{i}\xi B_2)q^{(e)}\,\mathrm{d}\Omega_e\\&=\delta q^{(e)\mathrm{T}}\int_{\Omega_e}(B_1^{\mathrm{T}}\tilde{C}_eB_1-\mathrm{i}\xi B_2^{\mathrm{T}}\tilde{C}_eB_1+\mathrm{i}\xi B_1{}^{\mathrm{T}}\tilde{C}_eB_2+\xi^2B_2^{\mathrm{T}}\tilde{C}_eB_2)\,\mathrm{d}\Omega_eq^{(e)}\end{aligned}\tag{6.5.16}$$

式中，$()^*$ 表示复共轭运算。这样单元的刚度矩阵可以用 Ω_e 区域的积分计算。对于黏弹性材料，式(6.5.16)定义的应变能的实部表示截面弹性能在时间上的平均值，虚部表示能量流损耗在时间上的平均值。

利用式(6.5.11)的位移表达式，并将谐波项简化为 $e^{\pm i(\xi x-\omega t)}$，式(6.5.15)可以重写为

$$\int_{V_e}\delta(u^{(e)^{\mathrm{T}}})\rho_e\ddot{u}^{(e)}\,\mathrm{d}V_e=\int_{\Omega_e}\int_x\delta(u^{(e)^{\mathrm{T}}})\rho_e\ddot{u}^{(e)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\Omega_e$$

$$=-\omega^2\delta q^{(e)^{\mathrm{T}}}\int_{\Omega_e}N^{\mathrm{T}}\rho_eN\mathrm{d}\Omega_eq^{(e)} \tag{6.5.17}$$

将式(6.5.16)和式(6.5.17)带入式(6.5.15)得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\bigcup_{e=1}^{n_{el}}\delta q^{(e)^{\mathrm{T}}}\left[k_1^{(e)}+\mathrm{i}\xi k_2^{(e)}+\xi^2k_3^{(e)}-\omega(m^{(e)})^2\right]q^{(e)}\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{6.5.18}$$

式中

$$k_1^{(e)}=\int_{\Omega_e}B_1{}^{\mathrm{T}}\tilde{C}_eB_1\mathrm{d}\Omega_e,\quad k_2^{(e)}=\int_{\Omega_e}(B_1{}^{\mathrm{T}}\tilde{C}_eB_2-B_2{}^{\mathrm{T}}\tilde{C}_eB_1)\mathrm{d}\Omega_e$$

$$k_3^{(e)}=\int_{\Omega_e}B_2{}^{\mathrm{T}}\tilde{C}_eB_2\mathrm{d}\Omega_e,\quad m^{(e)}=\int_{\Omega_e}N^{\mathrm{T}}\rho_eN\mathrm{d}\Omega_e \tag{6.5.19}$$

利用标准有限元法对式(6.5.18)进行组装：

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta U^{\mathrm{T}}(K_1+\mathrm{i}\xi K_2+\xi^2K_3-\omega^2M)\mathrm{d}t=0 \tag{6.5.20}$$

式中，U 为未知节点位移的全局矢量，并且

$$K_1=\bigcup_{e=1}^{n_{el}}k_1^{(e)},\quad K_2=\bigcup_{e=1}^{n_{el}}k_2^{(e)},\quad K_3=\bigcup_{e=1}^{n_{el}}k_3^{(e)},\quad M=\bigcup_{e=1}^{n_{el}}m^{(e)} \tag{6.5.21}$$

根据 δU 的任意性，得到均质介质的波动方程为

$$(K_1+\mathrm{i}\xi K_2+\xi^2K_3-\omega^2M)_MU=0 \tag{6.5.22}$$

式中，角标 M 表示系统的自由度数量。

当不考虑介质损耗时，刚度矩阵 K_1 和 K_3 为对称矩阵，K_2 为斜对称矩阵。当考虑介质损耗时，三个矩阵都是复数。对于所有介质，质量矩阵 M 都为正实数对称矩阵。

当不考虑能耗时，可以利用对角矩阵 T 消除式(6.5.22)中的虚部。矩阵 T 的元素中与 u_y、u_z 相关的都等于 1，而与 u_x 相关的等于 i

$$T=\begin{bmatrix}\mathrm{i}&&&&&&\\&1&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&\mathrm{i}&&\\&&&&&1&\\&&&&&&1\end{bmatrix} \tag{6.5.23}$$

利用矩阵 T 时不会改变 K_1、K_3 和 M 矩阵

$$T^{\mathrm{T}}K_1T=K_1,\quad T^{\mathrm{T}}K_3T=K_3,\quad T^{\mathrm{T}}MT=M \tag{6.5.24}$$

对于矩阵 K_2

$$T^{\mathrm{T}}K_2T=-\mathrm{i}\hat{K}_2 \tag{6.5.25}$$

式中，$\hat{K}_2$ 为无损耗介质的对称矩阵。最终，式(6.5.22)的特征问题可以写为

$$(K_1+\xi\hat{K}_2+\xi^2K_3-\omega^2M)_M\hat{U}=0 \tag{6.5.26}$$

式中，$\hat{U}$ 为新的节点位移矢量。通过求解非平凡解可以得到特征方程，从而求得 ξ 和 ω 的特征解。

对于无损耗材料，刚度矩阵 C 为实数，利用矩阵 T 可以将式(6.5.26)简化为实对称矩阵方程，然后通过标准特征矢量问题求解 $\omega(\xi)$，并且得到的都是传播模态：

$$[A-\xi B]_{2M}Q=0 \tag{6.5.27}$$

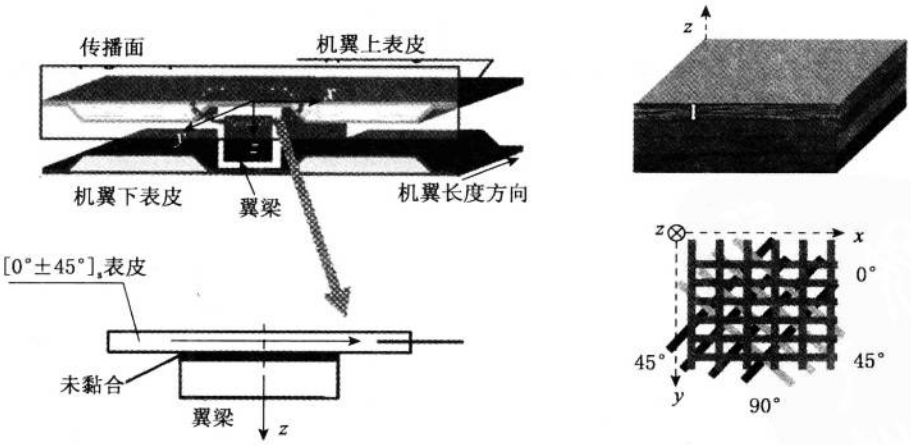
式中

$$A=\begin{bmatrix}0 & K_1-\omega^2M\\ K_1-\omega^2M & \hat{K}_2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}K_1-\omega^2M & 0\\ 0 & -K_3\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}\hat{U}\\ \xi\hat{U}\end{bmatrix} \tag{6.5.28}$$

对于损耗材料，刚度矩阵为复数，矩阵 A 和 B 都为复数。

6.5.2 应用实例

现用半解析有限元法计算无人飞行器机翼表皮与翼梁黏合层中的导波模态，机翼表皮和翼梁均为复合材料，机翼表皮是 T300/5208 碳-环氧薄片结构，每层之间按照(0°/±45°/0°)的形式依次叠加，如图 6.32 所示，其中 0°方向表示与翼梁平



(a) 机翼结构　　(b) 复合材料结构

图 6.32　机翼结构及表皮复合材料示意图

行的方向，每层厚度为 0.133mm，机翼表皮的弹性可以用复数刚度矩阵表示。翼梁为管状 T800/924 材料，近似为黏弹性正交各向异性层，壁厚为 5.235mm。黏合层厚度为 0.203mm。对于表皮和黏合层，每层用一个方形有限元单元模拟；对于翼梁，在厚度方向用五个方形有限元单元进行划分。在机翼表皮激发超声导波，保证声束沿垂直于翼梁方向传播，即图 6.32 所示的 x 轴方向，可以检测出黏合层中任何形式的缺陷。每一层介质的材料特性参数如表 6.1 所示。机翼表皮和翼梁的密度为 1530 kg/m^3，黏合层的密度为 1421 kg/m^3。表 6.2 给出了未黏合与黏合层的超声性能对比。可以看到黏合剂的退化使得横波波速严重减小，这是因为未黏合界面不利于剪应力的转换。

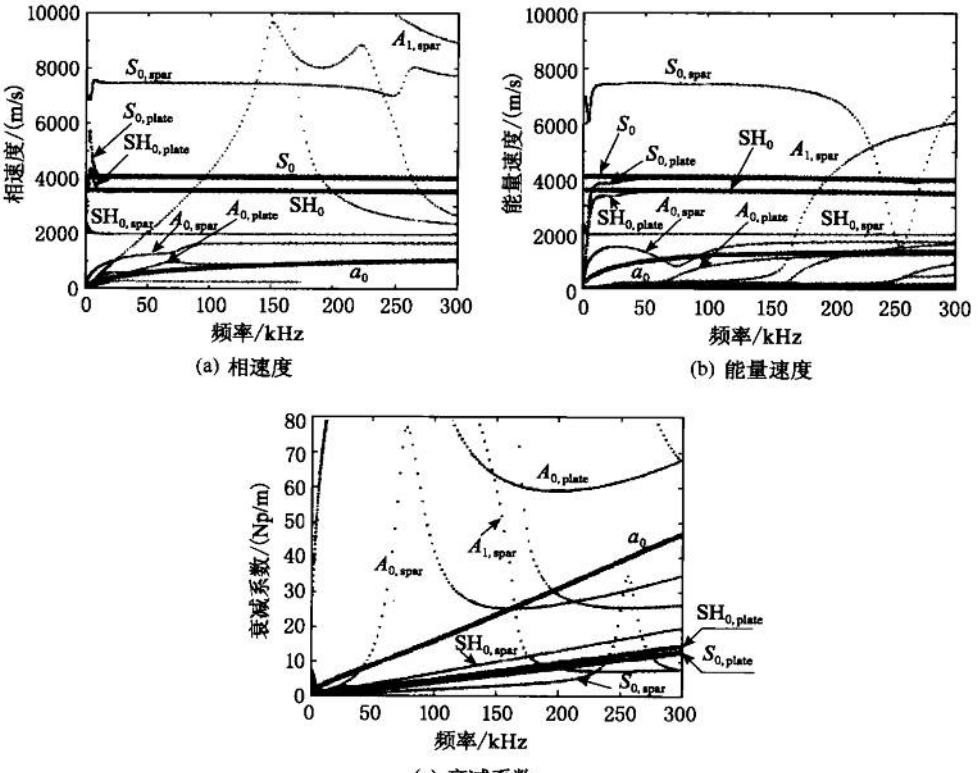
表 6.1 各层介质的材料特性参数

层	C_{11} (C''_{11})	C_{12} (C''_{12})	C_{13} (C''_{13})	C_{22} (C''_{22})	C_{23} (C''_{23})	C_{33} (C''_{33})	C_{44} (C''_{44})	C_{55} (C''_{55})	C_{66} (C''_{66})
表皮	135 (8.23)	5.70 (0.65)	5.70 (0.60)	14.2 (0.34)	8.51 (0.25)	14.2 (0.65)	2.87 (0.24)	4.55 (0.28)	4.55 (0.25)
翼梁	88.0 (4.28)	5.45 (0.65)	5.09 (0.425)	88.0 (4.28)	5.09 (0.425)	11.3 (0.65)	4.64 (0.26)	4.64 (0.26)	6.00 (0.25)
黏合层	0.070 (0.035)	0.069 (0.035)	0.069 (0.035)	0.070 (0.035)	0.069 (0.035)	0.070 (0.035)	0.00012 (0.00013)	0.00012 (0.00013)	0.00012 (0.00013)

表 6.2 黏合层中体波的声速和衰减系数

层	c_L/(m/s)	c_T/(m/s)	$\kappa_L(Np/\lambda)$	$\kappa_T(Np/\lambda)$
黏合	2410	1210	0.149	0.273
未黏合	241	12.1	1.497	2.736

利用 SAFE 计算得到的带有未黏合表皮翼梁界面的频散曲线如图 6.33 所示。未黏合界面的存在减弱了导波在机翼表皮与翼梁中的频散行为，能量集中在机翼表皮的模态都位于黏合线以上，如 $S_{0,\text{plate}}$、$A_{0,\text{plate}}$、$SH_{0,\text{plate}}$ 等；能量集中在翼梁的模态都位于黏合线以下，如 $S_{0,\text{spar}}$、$A_{0,\text{spar}}$、$SH_{0,\text{spar}}$ 等。$S_{0,\text{plate}}$、$A_{0,\text{plate}}$、$SH_{0,\text{plate}}$ 等模态只存在于机翼表皮。当频率增加时，未黏合层的“表皮”模态将与机翼表皮模态更接近，表示在机翼表皮产生的导波将会以某一“表皮”模态穿过未黏合界面。最终，可通过增加超声透射的强度来检测未黏合。



(a) 相速度　(b) 能量速度　(c) 衰减系数

图 6.33　带有未黏合表皮翼梁界面的频散曲线

6.5.3　基于 SAFE 和互易原则的导波回波计算

SAFE 只是用于求解波导介质中可能存在的导波模态，利用 SAFE 的结构，结合 Auld 互易原则，可以模拟导波的发射、传播、散射和接受过程。

对于如图 6.34 所示的两种状态，其中状态 1 为无缺陷存在，状态 2 为有缺陷存在，由 Auld 互易原则，两种状态下透射系数的差值 $\delta\Gamma$ 可以表示为

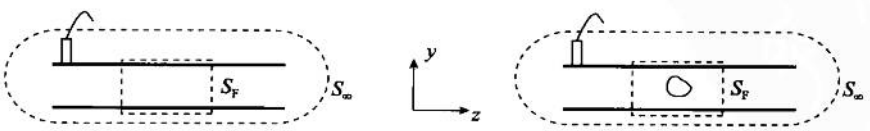


图 6.34　互易原则示意图

$$\delta\Gamma = \frac{1}{4P}\int_{S_F}(v_{(1)}\sigma_{(2)} - v_{(2)}\sigma_{(1)})n\mathrm{d}S \tag{6.5.29}$$

式中，$v_{(1)}$、$v_{(2)}$和$\sigma_{(1)}$、$\sigma_{(2)}$分别为质点速度场和应力场；P为入射信号的功率；n为垂直于S_F面的单位矢量。对于超声导波，质点速度和应力可以分解为特征模态的线性叠加：

$$\left.\begin{aligned} v(x,y,z) &= \sum_n A_n v_n(x,y,z) = \sum_n A_n \bar{v}_n(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta_n z)} \\ \sigma(x,y,z) &= \sum_n A_n \sigma_n(x,y,z) = \sum_n A_n \bar{\sigma}_n(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta_n z)} \end{aligned}\right\} \tag{6.5.30}$$

式中，A_n和β_n分别为第n种模态的振幅和波矢，波导介质中任意一点的声场由振幅A_n和模态解(β_n，σ_n，v_n)确定。

在状态1中，探头发射声场可以写为振幅和相位的表达式。忽略简谐项$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，则应力应变可以写为

$$\left.\begin{aligned} v_{(1)} &= \sum_n A_n^{\mathrm{r}} \bar{v}_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z_l} \\ \sigma_{(1)} &= \sum_n A_n^{\mathrm{r}} \bar{\sigma}_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z_l} \end{aligned}\right\} \quad \text{在 } S_l \text{ 侧} \tag{6.5.31}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{(1)} &= \sum_n A_n^{\mathrm{r}} \bar{v}_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z_r} \\ \sigma_{(1)} &= \sum_n A_n^{\mathrm{r}} \bar{\sigma}_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z_r} \end{aligned}\right\} \quad \text{在 } S_r \text{ 侧} \tag{6.5.32}$$

式中，S_l和S_r分别表示面S_F的左边和右边。式(6.5.31)和式(6.5.32)只是在相位上有所不同。

对于状态2，A_n^{e}表示入射场的振幅。$S_{ml,nl}$表示在S_l侧入射模态为n、反射模态为m时的反射系数振幅。$S_{mr,nl}$表示在S_l侧入射模态为n，在S_r侧透射模态为m的透射系数振幅。则S_l侧和S_r侧的声场可以分别表示为

$$\left.\begin{aligned} v_{(2)} &= \sum_n A_n^{\mathrm{e}} \bar{v}_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z_l} + \sum_n \sum_m A_n^{\mathrm{e}} S_{ml,nl} \bar{v}_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z_l} \\ \sigma_{(2)} &= \sum_n A_n^{\mathrm{e}} \bar{\sigma}_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z_l} + \sum_n \sum_m A_n^{\mathrm{e}} S_{ml,nl} \bar{\sigma}_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z_l} \end{aligned}\right\} \quad \text{在 } S_l \text{ 侧} \tag{6.5.33}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{(2)} &= \sum_n \sum_m A_n^{\mathrm{e}} S_{mr,nl} \bar{v}_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z_l} \\ \sigma_{(2)} &= \sum_n \sum_m A_n^{\mathrm{e}} S_{mr,nl} \bar{\sigma}_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z_l} \end{aligned}\right\} \quad \text{在 } S_r \text{ 侧} \tag{6.5.34}$$

带入式(6.5.29)，并且进行能量流归一化处理，得到

$$\delta\Gamma = \frac{1}{P}\sum_n \sum_m A_n^{\mathrm{r}} A_n^{\mathrm{e}} S_{nl,ml} \bar{\sigma}_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta_m+\beta_n)z_l} \tag{6.5.35}$$

利用SAFE得到的模态解，带入式(6.5.35)即可得到导波与缺陷作用之后的信号

回波。

现用基于 SAFE 和互易原则的导波回波计算方法进行图 6.35 杆中裂纹回波的计算，裂纹垂直于波导轴线，如图 6.35(a)所示，截面网格划分如图 6.35(b)所示。在波导终端截面施加垂直应力，计算得到各种尺寸缺陷在各种频率下的波形如图 6.36 所示，缺陷尺寸如图 6.36(a)、(b)、(c)所示，分别为 a、$3a/4$ 和 $a/2$(其中 a 为圆柱杆半径)。反射频率和模态形状选择如图 6.36(A)、(B)、(C)所示，频率分别为 900kHz、1140kHz、771kHz。图 6.36(A)为未进行模态选择的回波波形，图 6.36(B)为选择模态 $L(0,5)$ 的回波波形，图 6.36(C)为最大群速度的回波波形。

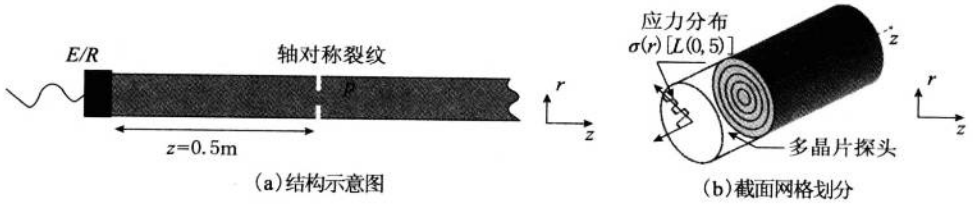


图 6.35 导波与杆介质中裂纹作用模型

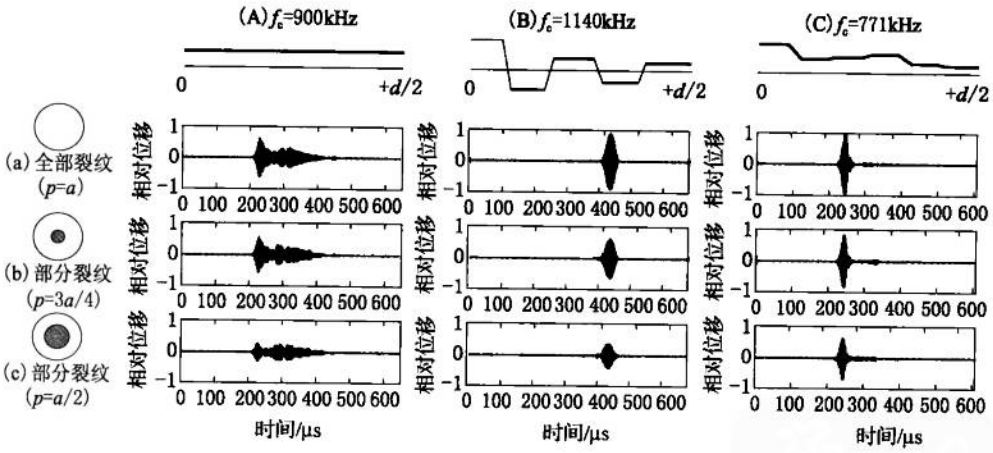


图 6.36 不同缺陷尺寸和频率下的回波

参考文献

[1] Rose J L. Ultrasonic Waves in Solid Media[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[2] 宋志东．超声导波技术在管道缺陷检测中的研究[D]. 天津:天津大学, 2006.

[3] Demma A. The Interaction of Guided Waves with Discontinuities in Structures[D]. London: The University of London, 2003.

[4] Diligent O. Interaction between Fundamental Lamb Modes and Defects in Plates[D]. London: The University of London, 2003.

[5] Lee C M. Guided Elastic Waves in Structures with an Arbitrary Cross-section[D]. Philadelphia: The Pennsylvania State University, 2006.

[6] Cho Y, Rose J L. An elastodynamic hybrid boundary element study for elastic guided wave interactions with a surface breaking defect[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37(30):4103-4124.

[7] Zhao X L. Boundary element modeling for defect characterization potential in a wave guide [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(11):2645-2658.

[8] Jezzine K, Lhemery A. Simulation of guided wave inspection based on the reciprocity principle and the semi-analytical finite element method[C]. Review of Quantitative Nondestructive Evaluation, 2007, 26:39-46.

[9] Jezzine K, Lhémery A. A simulation study for mode selection by means of multiple-element ultrasonic transducer acting from the section of a waveguide[C]. The International Congress on Ultrasonics, Vienna, April 9-13, 2007, Session R16, NDT, Guided Waves, 2007:1-4.

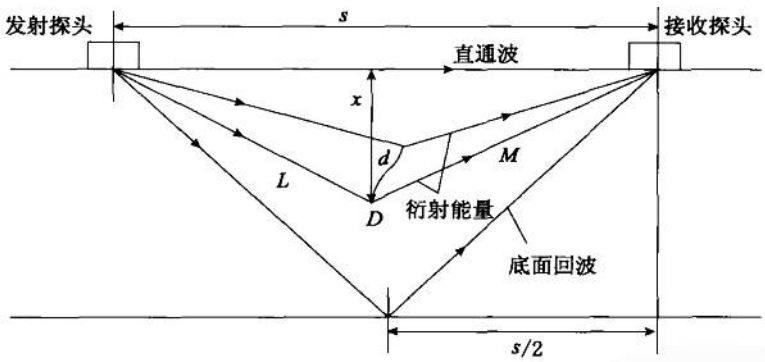
[10] Bartoli I, Marzani A, et al. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 295(3~5): 685-707.

第 7 章　超声衍射时差检测

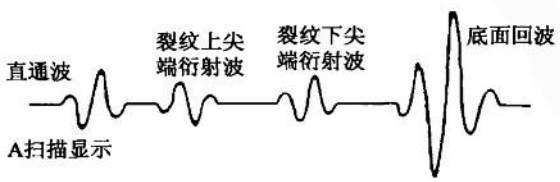
超声衍射时差(time of flight diffraction,TOFD)是一种依靠超声波在待检工件内部结构(主要是指缺陷)的端角处的衍射回波来检测缺陷的检测方法[1]。TOFD 检测技术是 20 世纪 70 年代末由英国 Harwell 试验室(UKAEA)的 Silk 和 Lidington 发明的。它可以通过缺陷尖端的衍射信号精确测量平面缺陷在壁厚方向上的高度值。

7.1　TOFD 检测原理

在焊缝两侧对称放置一对频率、尺寸和倾斜角相同的纵波斜探头,其中一个作为发射探头,另一个作为接收探头,如图 7.1(a)所示。在无缺陷区域,接收探头只接收到沿工件表面传播的直通波和经底面反射的底面回波;在存在面状缺陷的区域,由于存在尖端对超声波衍射作用,接收探头同时还会接收到裂纹尖端的衍射信



(a) TOFD检测示意图



(b) 接收探头接收的A显信号

图 7.1　TOFD 检测原理图

号，如图 7.1(b)所示。直通波信号和地面回波信号用于确定有效区域，缺陷的上尖端衍射波和下尖端衍射波信号用于计算缺陷尺寸。

假设 S 为两探头之间的距离，c_L 为纵波波速，t_T 为接收探头接收到上尖端衍射信号的时间，t_B 为接收探头接收到下尖端衍射信号的时间，t_L 为接收探头接收到直通波信号的时间，令 $\Delta t_1 = t_T - t_L$，$\Delta t_2 = t_B - t_L$，则有

$$\text{deep} = \sqrt{\left(\frac{c_L \Delta t_1}{2} + \frac{S}{2}\right)^2 - \left(\frac{S}{2}\right)^2} \tag{7.1.1}$$

$$\text{height} = \sqrt{\left(\frac{c_L \Delta t_2}{2} + \frac{S}{2}\right)^2 - \left(\frac{S}{2}\right)^2} - \text{deep} \tag{7.1.2}$$

式中，deep 为缺陷顶端到工件表面的距离；height 为缺陷在深度方向上的长度。

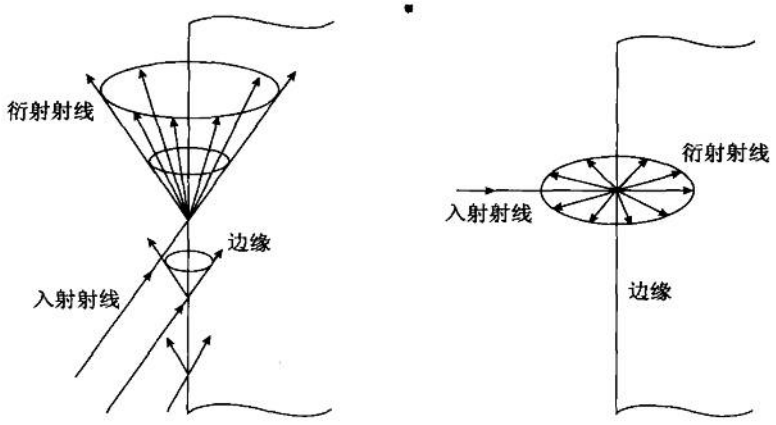
7.2　GTD 理论

GTD 是几何光学(GO)理论的延伸，20 世纪 60 年代，Keller 为了解决几何光学不能计算非连续场的问题而提出了 GTD[2,3]。几何光学是利用经典几何光学中束(beam)的思想来解释复杂介质中的波动现象，因此 GO 适用于参数连续变换的介质中场的计算，而对于参数非连续变换的介质中的场无能为力。GTD 在解决非连续场的计算的同时，保留了 GO 的优点——束的思想。随后 Kouyoumjian 在 GTD 的基础上发展了 UTD(uniform geometrical theory of diffraction)以解决 GTD 在反射边界和阴影边界无准确计算的问题。

7.2.1　衍射法则

当一束射线入射到某一障碍物边缘时会发生衍射，此时的衍射符合边缘衍射法则。所谓的边缘衍射法则是指，衍射射线与其相对应的入射射线对称分布在入射点处法平面的两侧。如图 7.2(a)所示，一条入射射线对应有无数的衍射射线，这些衍射射线成圆锥状分布，圆锥的轴线与边缘相切于入射点。圆锥的半角等于入射射线与边缘入射点切线的夹角。当入射射线垂直于边缘，则衍射射线成平面状分布且在入射平面内。

当一束射线入射到某一障碍物边缘上的尖点或顶点时也会产生衍射现象，此时的衍射符合顶点衍射法则。所谓的顶点衍射法则是指，衍射射线成球面状发射，即衍射射线存在于各个方向，如图 7.2(b)所示。



(a)倾斜入射　　(b)垂直入射

图 7.2　边缘衍射现象示意图

7.2.2　边缘衍射系数

对于每一条射线都可以用 $u=A(s)e^{ikf(s)}$ 来表示射线上各处的声场，$A(s)$为振幅，$kf(s)$为相位，两者均为位置 s 的函数。

射线上两点间相位的差距等于 k(波数)倍的距离，所以有 $f(s)-f(s_0)=s-s_0$。

射线上两点间振幅的差距可以由能量守恒定律得到。能量守恒定律的表述是，通过射线上任意两个不同截面的能量是相等的。流体的能量可以表示为 $c^{-1}A^2\mathrm{d}\sigma$，这里的 $\mathrm{d}\sigma$ 是指能量通过的区域面积。由能量守恒定律可知，对于射线上两个不同截面有 $c^{-1}A^2\mathrm{d}\sigma=c^{-1}A_0{}^2\mathrm{d}\sigma_0$。所以 $A=A_0(\mathrm{d}\sigma_0/\mathrm{d}\sigma)^{\frac{1}{2}}$，即在已知 P_0 的振幅 A_0 时，计算 $\mathrm{d}\sigma_0/\mathrm{d}\sigma$ 就可以得到计算点 P 的振幅 A。令 ρ_1、ρ_2 为 P_0 处两个主曲率，如图 7.3 所示，有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}\sigma}=\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+s)(\rho_2+s)} \tag{7.2.1}$$

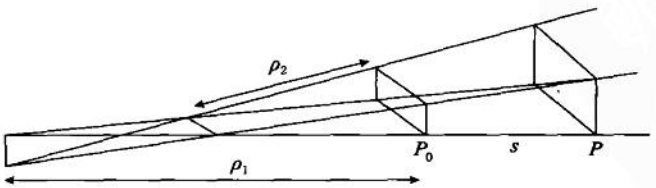


图 7.3　两不同点的主曲率示意图

因此

$$A = A_0\left[\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+s)(\rho_2+s)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.2.2}$$

式中，P 处的声场则可以表示为

$$u = A_0\left[\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+s)(\rho_2+s)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{ik(s+f_0)} \tag{7.2.3}$$

由式(7.2.3)可以看出，以 s 远大于 ρ_1、ρ_2 为前提，ρ_1、ρ_2 为有限值时，振幅的衰减是与 s 成反比；ρ_1、ρ_2 其中之一为无限时，振幅的衰减是与 $s^{\frac{1}{2}}$ 成反比；ρ_1、ρ_2 均为无限时，振幅不衰减。所以在某些情况下，可能出现某些点的计算值为无穷，称这些点为焦散点。焦散点与 P_0 位置有关。

由图 7.4 可以看出，反射射线束上的点 P 沿着射线束到曲率中心的距离等于其镜像 Q 到对应曲率中心的距离。令 ρ_2 为反射射线束上的点 P_0 沿着射线束到界面上入射点的距离，则可以将式(7.2.2)改写成

$$A_0\rho_2^{\frac{1}{2}} = A[(\rho_1+s)(\rho_2+s)]^{\frac{1}{2}}\rho_1^{-\frac{1}{2}} \tag{7.2.4}$$

令 A 为某一固定点 P 处的振幅，则对于 P_0 趋近于边缘时，P_0 的振幅 A_0 值记为 A_{00}，此时的 ρ_2 趋近于 0，则有 $A=A_{00}[(\rho_1+s)s/\rho_1]^{-\frac{1}{2}}$

令 B 为衍射系数，则在衍射射线束上的声场可以表示为

$$\begin{aligned} u &= A_{00}B[(\rho_1+s)s/\rho_1]^{-\frac{1}{2}} e^{ik(s+f_0')} \\ &= A_{00}B|A(s,\rho_1)|e^{ik(s+f_0)} \end{aligned} \tag{7.2.5}$$

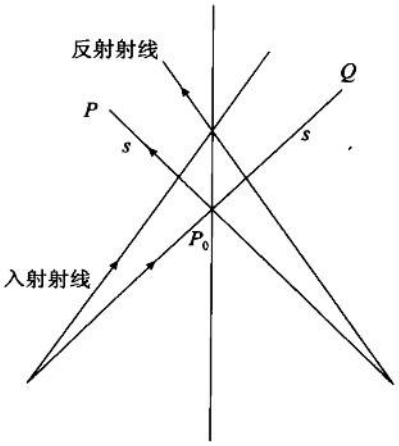


图 7.4　反射与其镜像示意图

式(7.2.5)中的 ρ_1 为边缘到其他焦散点的距离，如图 7.5 所示。ρ_1 的具体表达式为

$$\rho_1 = -\rho\sin^2\beta(\rho\beta_1\sin\beta+\cos\theta)^{-1} \tag{7.2.6}$$

式中，ρ 为入射点处边缘的曲率半径；β 为入射射线束与边缘的夹角；β_1 为 β 在弧长对应的分量；θ 为衍射角。

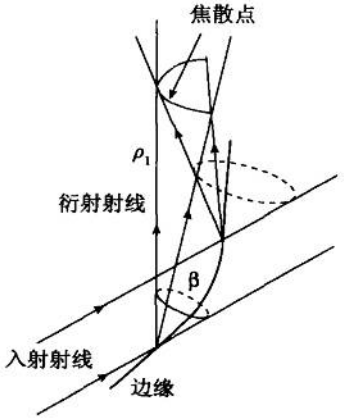


图 7.5 射线束在边缘的反射示意图

衍射系数 B 是通过边界值法得到的，其具体表达式为

$$B = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2(2\pi k)^{\frac{1}{2}}\sin\beta}\left[\sec\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\pm\csc\frac{1}{2}(\theta+\alpha)\right] \tag{7.2.7}$$

将入射射线束和衍射射线束均投影到入射点的法平面内，如图 7.6、图 7.7 所示，x 轴垂直于边缘，θ、α 分别为入射射线束、衍射射线束与 x 轴的夹角。

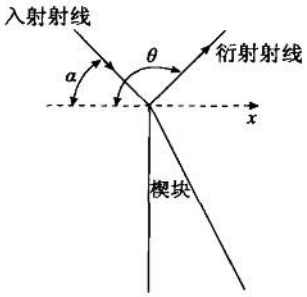


图 7.6 楔块投影示意图

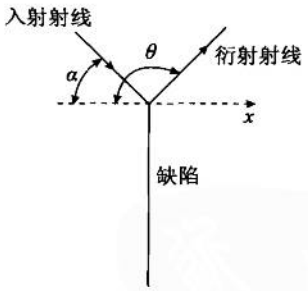


图 7.7 面缺陷投影图

Achenbach 等在 Keller 的研究基础上得到了复杂情况下的 GTD 公式及三维衍射系数 B_α^β（α 表示入射波波形，β 表示衍射波波形）

$$B_\alpha^\beta(\theta;\phi_\alpha,\theta_\alpha) = -\frac{1}{2}\kappa_\beta^{\,2}q_\beta^{-1}PF_\beta^\alpha(\theta)\left[E_1^\alpha(\theta_\alpha)E_1^\beta(\theta)L_\beta^\alpha(\theta)G_{1\beta}^{\alpha\beta}(\theta)\right.$$
$$\left.+E_2^\alpha(\theta_\alpha)E_2^\beta(\theta)G_{L\beta}^\alpha(\theta)\right] \tag{7.2.8}$$

式中，θ_α、ϕ_α、θ 分别在图 7.8 中表示为角 1、2、3。图 7.8 中，OP 为入射声束矢量，OQ 为衍射声速矢量在 Oyz 面上的分量（Oz 为 z 轴）。式(7.2.8)其中用到的各参数表达式如下：

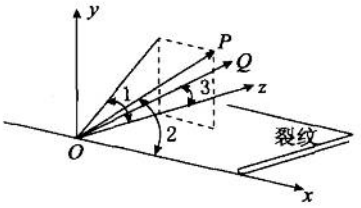


图 7.8　平面波入射到裂纹示意图

$$\kappa_\beta = \frac{c_L}{c_\beta}$$

$$q_\alpha = \kappa_\alpha \sin\phi_\alpha$$

$$P = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$F_\beta^\alpha(\theta) = \kappa_\alpha \kappa_\beta^2 [2(\kappa_T^2 - 1)(q_\alpha \cos\theta_\alpha - q_\beta \cos\theta) H_\alpha^+(\theta_\alpha) H_\beta^-(\theta)]^{-1}$$

$$H_\beta^\pm(\theta) = (q_R \pm q_\beta \cos\theta) K^+(\pm q_\beta \cos\theta)$$

$$G_{\gamma\beta}^\alpha(\theta) = (q_\alpha \cos\theta_\alpha \pm q_\gamma)^{\frac{1}{2}} (q_\gamma - q_\beta \cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$L_\beta^\alpha(\theta) = \frac{g^+ S_\alpha^+(\theta_\alpha) S_\beta^-(\theta) - g^- S_\alpha^-(\theta_\alpha) S_\beta^+(\theta)}{(g^+ - g^-) Z_\alpha(\theta_\alpha) Z_\beta(\theta)}$$

$$g^\pm = \frac{\pm i e^{\pm i(\phi_T - \phi_R)} K^+(\pm i \cos\phi_L)}{K_0}$$

$$K_0 = \kappa_R^{-1} \kappa^2 [2(\kappa^2 - 1)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\ln K^+(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{q_L}^{q_T} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{a_2(t)}{a_1(t)}\right)}{t + \xi} dt$$

$$a_1(t) = (\kappa^2 \cos^2 2\phi_T - 2t^2)^2$$

$$a_2(t) = 4(t^2 + \kappa_\alpha^2 \cos^2\phi_\alpha)(t^2 - q_L^2)^{\frac{1}{2}} (q_T^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$Z_\beta(\theta) = [S_\beta^+(\theta) S_\beta^-(\theta)]^{\frac{1}{2}}$$

$$S_\alpha^\pm(\theta) = q_\alpha \cos\theta \pm i\kappa_\alpha \cos\phi_\alpha$$

$$E_1^L(\theta) = 2q_L Z_L(\theta) \sin\theta$$

$$E_1^{TV}(\theta) = 2\kappa^{-2} Z_T^2(\theta) - 1$$

$$E_2^L(\theta) = \kappa^2 - 2Z_L^2(\theta)$$

$$E_2^{TV}(\theta) = 2\kappa^{-2} q_T Z_T(\theta) \sin\theta$$

7.3　声　线　法

用 TOFD 法检测工件内部裂纹类缺陷时，发射探头的入射点 T、裂纹上尖端的衍射点、裂纹下尖端的衍射点和接收探头的入射点 R 四点需要共面；从裂纹上尖端得到的衍射回波能与从裂纹下尖端得到的衍射回波明显区分开，以便于测量；

从裂纹上得到的衍射回波信号明显小于直通波和底面回波信号。因此能以二维的情况考虑模型的建立，并能以声线法分别描述直通波、底面回波和裂纹衍射波的产生。由于是二维模型，在考虑裂纹衍射时用到的衍射系数是由 GTD 法得到的二维衍射系数。

二维边缘衍射系数表示为 B_α^β（α 表示入射波波形，β 表示衍射波波形），其中纵波入射，纵波衍射的衍射系数为

$$B_{\mathrm{L}}^{\mathrm{L}}=\exp(\mathrm{i}\pi/4)\sqrt{k_{\mathrm{T}}/k_{\mathrm{L}}}\times\frac{\sin(\gamma/2)\left[\sin(\theta/2)R(\theta)R(\gamma)+k_{\mathrm{L}}^3\sqrt{Q_{\mathrm{TL}}(\theta)Q_{\mathrm{TL}}(\gamma)}\right]}{2\pi(k_{\mathrm{T}}^2-k_{\mathrm{L}}^2)(\cos\theta+\cos\gamma)Q_{\mathrm{TL}}(\theta)Q_{\mathrm{TL}}(\gamma)K^+(-k_{\mathrm{L}}\cos\theta)K^+(-k_{\mathrm{L}}\cos\gamma)} \tag{7.3.1}$$

式中

$$Q_{\mathrm{TL}}(\theta)=k_{\mathrm{T}}-k_{\mathrm{L}}\cos\theta,\quad Q_{\mathrm{TL}}(\gamma)=k_{\mathrm{T}}-k_{\mathrm{L}}\cos\gamma \tag{7.3.2}$$

$$R(\theta)=2k_{\mathrm{L}}^2\cos^2\theta-k_{\mathrm{T}}^2,\quad R(\gamma)=2k_{\mathrm{L}}^2\cos^2\gamma-k_{\mathrm{T}}^2 \tag{7.3.3}$$

$$K^+(\alpha)=\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_{k_{\mathrm{L}}}^{k_{\mathrm{T}}}\arctan\left(\frac{4x^2\sqrt{x^2-k_{\mathrm{L}}^2}\sqrt{k_{\mathrm{T}}^2-x^2}}{(2x^2-k_{\mathrm{T}}^2)^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x+\alpha}\right) \tag{7.3.4}$$

式中，γ 为入射角；θ 为衍射角；k_{T} 为横波波数；k_{L} 为纵波波数。

声线模型能用于计算 TOFD 检测过程中各声信号到达接收探头的时间，但是不能准确计算各信号的振幅[4,5]。如图 7.9 所示，在保证发射探头和接收探头距离不变的情况下，直通波和地面回波到达接收探头的时间不变，而裂纹尖端的衍射回波随着探头位置的不同而改变。图 7.9(d)为探头移动所产生的 B 显图。衍射系数可以用于确定衍射回波的幅值。

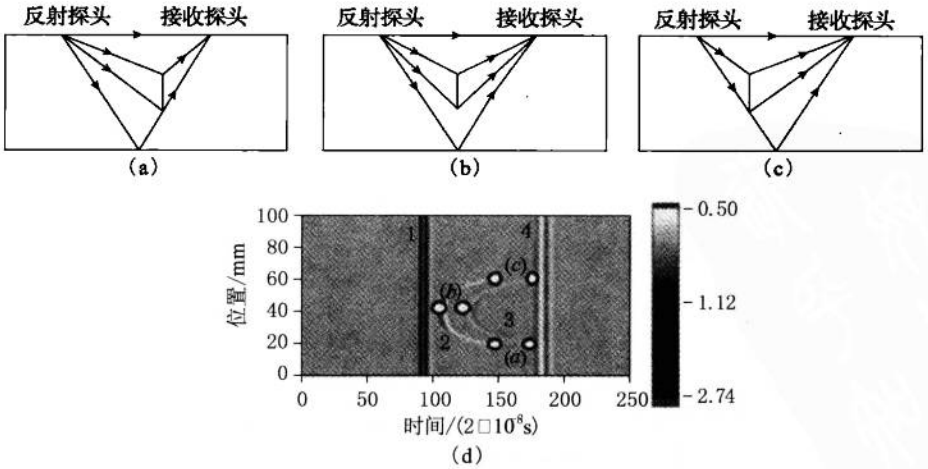


图 7.9 TOFD 探头组移动过程的声线变化和 B 显图

在 10mm 厚的铝板中制造尺寸不同的垂直方向的缺陷，缺陷尺寸依次为 6.5mm、3.25mm、1.6mm、0.8mm，探头组采用 70°纵波探头，探头的中心频率为 5MHz。图 7.10 为实验结果与声线模型的 B 显图形对比结果，其中左列为实验数据，右列为计算数据。图 7.11 为实验结果与声线模型的 A 显图形对比结果，其中点画线为实验数据，实线为计算数据。

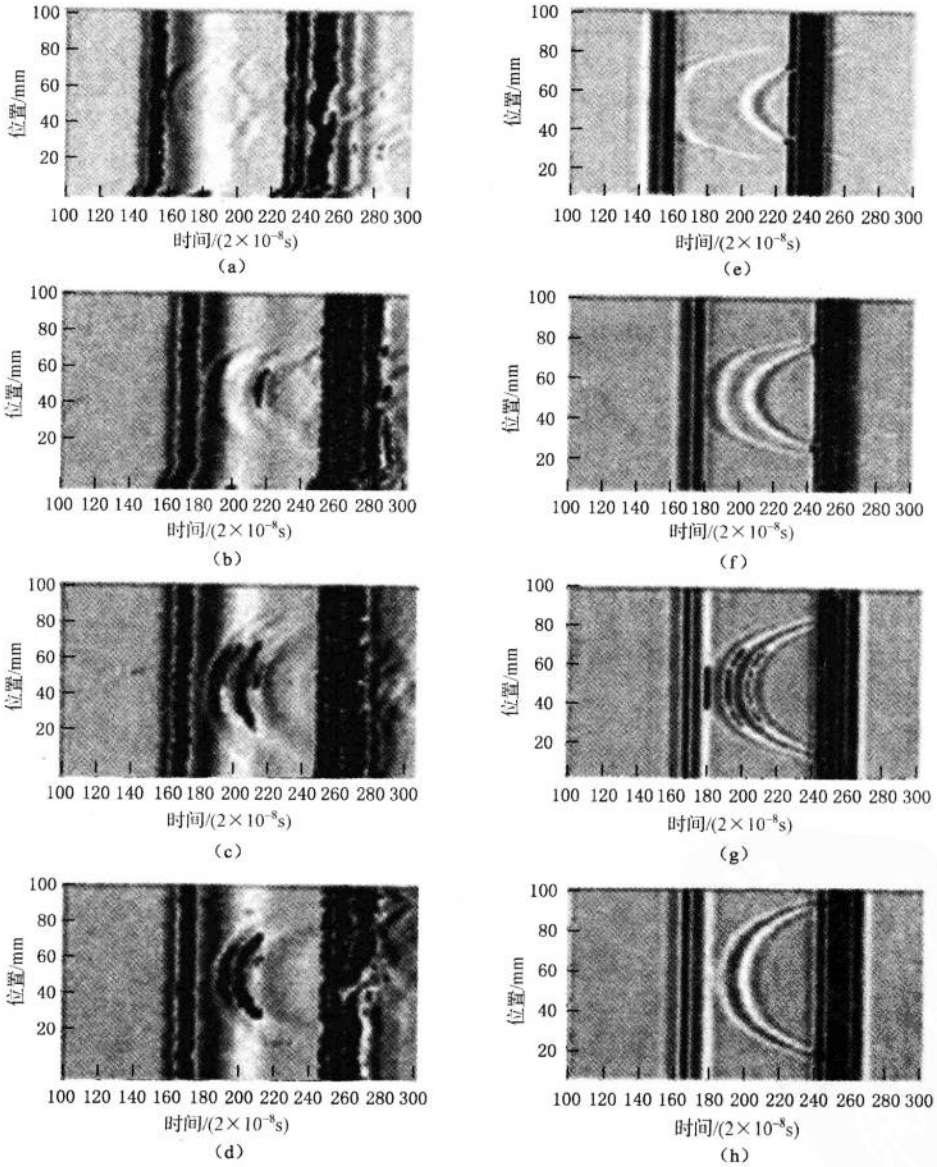


图 7.10　B 显方式的实验结果与计算结果对比

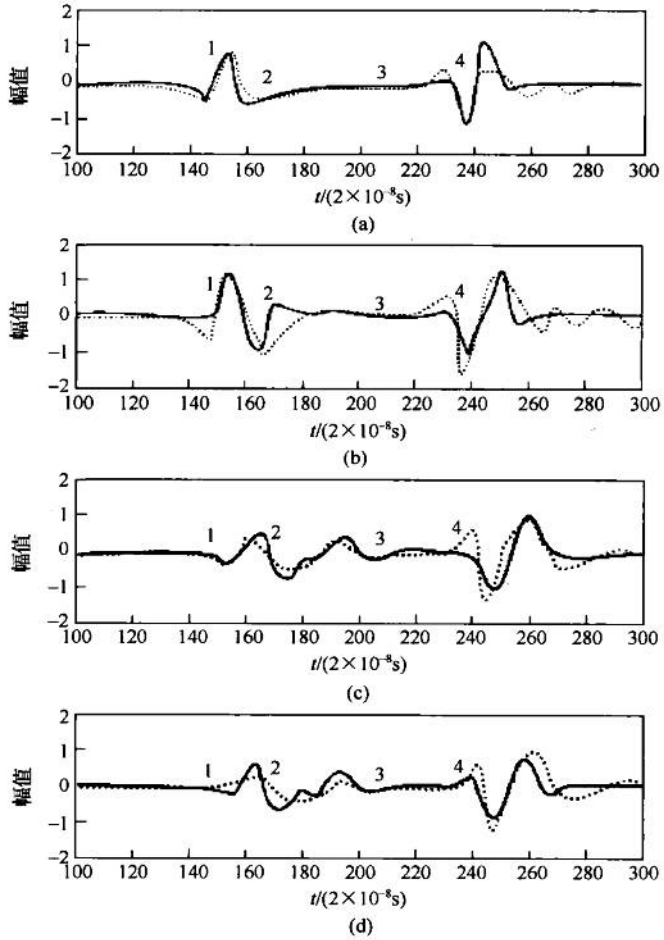


图 7.11 A 显方式的实验结果与计算结果对比

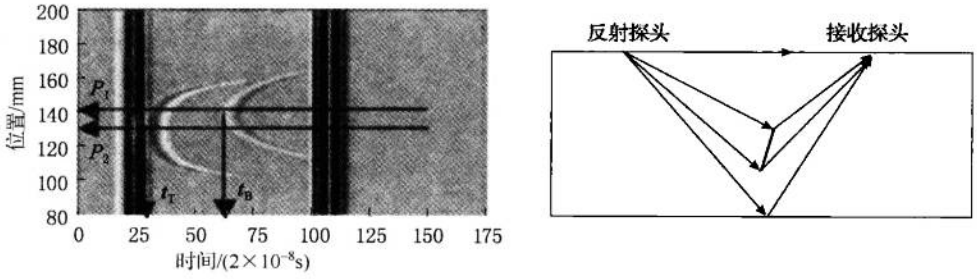
表 7.1 列出了通过实际 TOFD 检测结果得到的缺陷长度和分析模型计算结

表 7.1 实验数据与计算结果对比

频率		实际尺寸			
		6.50mm	3.25mm	1.60mm	0.80mm
2.5MHz	实验数据	4.30(33.85)	2.50(23.08)	1.20(25)	0.60(25)
	模型计算	4.27(34.31)	3.09(4.92)	1.34(16.25)	0.70(12.5)
5MHz	实验数据	5.60(13.85)	2.90(10.77)	1.10(31.25)	0.61(23.75)
	模型计算	6.10(6.15)	3.14(3.38)	1.35(15.63)	0.71(11.25)
10MHz	实验数据	6.18(4.92)	3.10(4.62)	1.76(10)	0.87(8.75)
	模型计算	6.30(3.08)	3.20(1.54)	1.55(3.13)	0.78(2.5)

果所得的缺陷长度，括弧内表示的是数据与裂纹实际长度的差值百分比。从表中可以看出，低频时的检测结果与实际相差较大，模型计算结果与实际检测结果匹配，能帮助 TOFD 检测探头的选择。

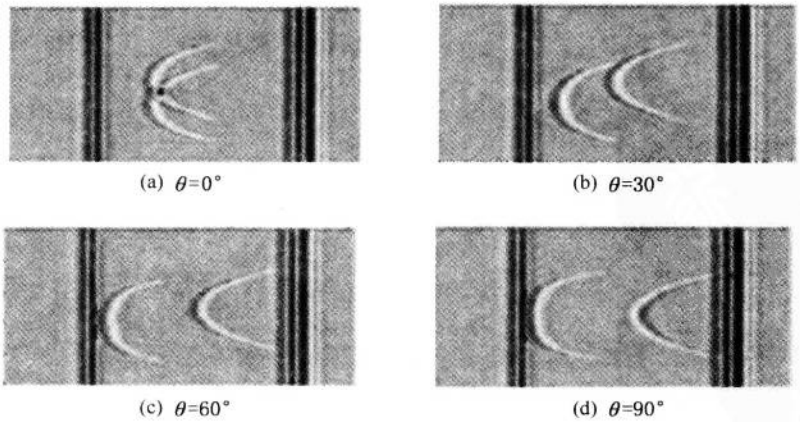
当工件中的裂纹与工件表面不垂直时，由于裂纹的上下衍射点在竖直方向的位置不一致，导致其 B 显图形中对应曲线的峰值位置不一致，如图 7.12 所示。从图 7.12(a)可以看到，有两个不同的峰值分别记为 P_1 和 P_2，由两峰值位置可以计算得到倾斜裂纹上下尖端的水平位置差 s_a 和竖直位置差 s_b，再根据公式 $\sqrt{s_a^2+s_b^2}$ 可以计算出裂纹长度。图 7.12(a)中，t_T 表示到达裂纹顶端时间，t_B 表示到达裂纹底端时间。



(a) TOFD检测倾斜裂纹的B显图　　(b) 含有倾斜裂纹的检测示意图

图 7.12　TOFD 检测倾斜裂纹

在 10mm 厚的铝制工件中设置不同倾角的 6mm 裂纹，并用该声线模型分别模拟 TOFD 的检测结果，检测用的探头组为 50°探头，其中心频率为 5MHz，模拟结果见图 7.13。其中 θ 角是指裂纹与工件表面的夹角。



(a) θ=0°　　(b) θ=30°

(c) θ=60°　　(d) θ=90°

图 7.13　不同倾角裂纹的 TOFD 检测 B 显图

7.4 半解析法

采用半解析法模拟 TOFD 检测过程的重点在于计算超声波在裂纹尖端的衍射，从而得到接收探头所接收的衍射回波信号，直通波信号可以由第 5 章中的表面波半解析法计算得到，底面反射回波信号可以由第 2 章中介绍的半解析法计算得到。

7.4.1 背散射的简化

对背散射检测进行简化可以简化计算过程。对于某一有限孔径的探头，其上任意一点源到达某一直线裂纹上任意点时的入射角近似相等，因此由此产生的衍射角也近似相等。总体来看，所有的衍射射线束的波前可以看做是一个类圆柱面。因此，衍射系数可以看作只是 θ 和 θ_α 的函数，而得到简化。

Chapman 已经给出连续波(CW)衍射场公式，再用背散射分析[6]。纵波衍射标量势是 ϕ 和横波矢量势 ψ 统一用符号 Φ 表示。入射面与裂纹边缘相交于点 r'，入射线经 r' 点衍射，则计算点 r 处的衍射场为

$$\Phi^{\mathrm{diff}}(r,\omega)=\Phi^{\mathrm{inc}}(r',\omega)\,|A(R_\beta,\rho)|\,D_\alpha^\beta(\theta;\theta_\alpha)\sqrt{\frac{2\pi c_\beta}{\omega}}\exp(-\mathrm{j}k_\beta R_\beta d_\beta^\alpha) \tag{7.4.1}$$

式中，$\Phi^{\mathrm{inc}}(r',\omega)$ 是衍射点 r' 处的入射场；ω 为脉冲角频率；D 为衍射系数，α、β 对应不同波形(T，L)；c 为声速；$\theta_\alpha(\theta)$ 是声束线与裂纹面上裂纹边缘 r' 处法线方向的夹角，即入射角(衍射角)；$R_\beta=|r-r'|$；k_β 是衍射波数；d_β^α 是衍射场的位移方向。$A(R,\rho)$ 可以根据式(7.2.4)计算得出。

将 Chapman 的结论扩展到整个频谱(包括负频率)，进行反傅里叶变换分析，获得体积衍射波：

$$\begin{aligned}\Phi^{\mathrm{diff}}(r,\omega)=&\Phi^{\mathrm{inc}}(r',\omega)\,|A(R_\beta,\rho)|\,D_\alpha^\beta(\theta;\theta_\alpha)\exp\left(\frac{\mathrm{j}\pi}{4[\mathrm{sgn}(\omega)-1]}\right)\\&\times\sqrt{\frac{2\pi c_\beta}{\omega}}\{K^+[l(\alpha)]K^+[n(\beta)]\}^{1-\mathrm{sgn}(\omega)}\exp(-\mathrm{j}k_\beta R_\beta d_\beta^\alpha)\end{aligned} \tag{7.4.2}$$

式中，$\mathrm{sgn}(\omega)=\dfrac{\omega}{|\omega|}$；$l(\alpha)$ 与 $n(\beta)$ 分别表示入射与衍射函数。

在考虑到表面波的影响时，裂纹表面任意点 r_c 的声场表示为

$$\begin{aligned}\Phi_R^{\mathrm{diff}}(r_c,\omega)=&\Phi^{\mathrm{inc}}(r',\omega)\,|A(R_R,\rho)|\,D_\alpha^R(\theta_\alpha)\\&\times\{K^+[l(\alpha)]K^+[n(\beta)]\}^{1-\mathrm{sgn}(\omega)}\exp(-\mathrm{j}k_R R_R d_R^\alpha)\end{aligned} \tag{7.4.3}$$

式中，衍射系数 $D_\alpha^R(\theta_\alpha)$ 的上标 R 表示表面波。

7.4.2　衍射模型瞬态公式

衍射波可以表示为频率函数，因此可以用时域表达式推导得到 GTD[7~11]。首先计算势场的时间反傅里叶变换，由卷积性质可以得到

$$\Phi^{\mathrm{diff}}(r,t) = |A^{\mathrm{diff}}(R_\beta,\rho)|\overline{D}_\alpha^\beta \Phi^{\mathrm{inc}}(r',t) \otimes f(t) \otimes h(t) \tag{7.4.4}$$

式中，衍射系数 D_α^β 的幅值和相位表示为

$$D_\alpha^\beta(\theta;\theta_\alpha) = \overline{D}_\alpha^\beta \exp(\mathrm{j}\varphi(D_\beta^\alpha))$$

式(7.4.4)中的函数 $f(t)$与转换函数 $h(t)$分别为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega)\,\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{|\omega|}} \exp(\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}\omega$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\mathrm{j}\left[\varphi(D_\alpha^\beta) - \frac{\pi}{4}\right]\right) K(\alpha,\beta,\omega)\exp(\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}\omega$$

$$K(\alpha,\beta,\omega) = \{K^+[l(\alpha)]K^+[n(\beta)]\}^{1-\mathrm{sgn}(\omega)}$$

对 $f(t)$应用伪函数理论得出非收敛函数的傅里叶变换(TF)：

$$\mathrm{TF}(|t|^v) = -\sqrt{2}\Gamma(v+1)\sin\left(\frac{v\pi}{2}\right)\frac{1}{|\omega|^{v+1}}$$

$$\mathrm{TF}(\mathrm{sgn}(t)|t|^v) = -\sqrt{2}\mathrm{j}\Gamma(v+1)\cos\left(\frac{v\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sgn}(\omega)}{|\omega|^{v+1}} \tag{7.4.5}$$

式中，v 值可正可负，但不是整数。γ 函数 $\Gamma(p)$定义在 $\mathrm{Re}(p)>0$ 范围内。当 $v=-\frac{1}{2}$时，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$。

令 t_0 为衍射激励起始时间，则函数 $f(t)$可以表示为

$$f(t) = \frac{1-\mathrm{sgn}(t)}{\sqrt{2\pi|t|}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi t}}, & t_0 < t < t^{\mathrm{observation}} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{7.4.6}$$

对于入射实波，期望得到衍射实波，则转换函数 $h(t)$必须是实函数，因此

$$h(t) = 2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left[\varphi(D_\alpha^\beta)-\frac{\pi}{4}\right]} K(\alpha,\beta,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\right] \tag{7.4.7}$$

式(7.4.7)的积分可由赫维赛德单位阶跃函数(Heaviside unit step function)的反傅里叶变换实现：

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}\left[\delta(t) + \mathrm{pv}\left(\frac{\mathrm{j}}{\pi t}\right)\right] \tag{7.4.8}$$

式中，$\delta(t)$是狄拉克函数(Delta dirac function)；pv 是柯西主值(Cauchy principal

value)。因此

$$h(t) = \delta(t)\cos\left(\varphi(D_\alpha^\beta) - \frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{pv}\left(\frac{1}{\pi t}\right)\sin\left(\varphi(D_\alpha^\beta) - \frac{\pi}{4}\right) \tag{7.4.9}$$

对函数 $s(t)$作希尔伯特变换得到

$$H(s(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} -\mathrm{jsgn}\ (\omega)S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = s(t) * \mathrm{pv}\left(\frac{-1}{\pi t}\right) \tag{7.4.10}$$

作为体积波第一步计算结果,衍射场可以表示为

$$\begin{aligned}\Phi^{\mathrm{diff}}(r,t) = {} & |A^{\mathrm{diff}}(R_\beta,\rho)|\,\overline{D}_\alpha^\beta\sqrt{\frac{c_\beta}{t}}\Pi(t,R_\beta,c_\beta) \\ & * \left[\cos\left(\varphi(D_\alpha^\beta) - \frac{\pi}{4}\right)\Phi^{\mathrm{inc}}\left(r',t-\frac{R_\beta}{c_\beta}\right)\right. \\ & \left. + \sin\left(\varphi(D_\alpha^\beta) - \frac{\pi}{4}\right)H\left(\Phi^{\mathrm{inc}}\left(r',t-\frac{R_\beta}{c_\beta}\right)\right)\right]d_\beta^\alpha\end{aligned} \tag{7.4.11}$$

式中

$$\Pi(t,R) = \begin{cases} 2, & 0 < t < \dfrac{R_\beta}{c_\beta} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{7.4.12}$$

Achenbach 预测:角度(入射和衍射)在一定范围内,$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}D_\alpha^\beta$ 为实值。这些角度范围对应衍射系数的相位为$\frac{\pi}{4}$或$\frac{5\pi}{4}$。

最后,其他卷积分析如下:

$$\frac{1}{\sqrt{|t|}} * \frac{1}{\pi t} = \frac{\mathrm{sgn}(t)}{\sqrt{|t|}} \tag{7.4.13}$$

与

$$\frac{\mathrm{sgn}(t)}{\sqrt{|t|}} * \frac{1}{\pi t} = \frac{-1}{\sqrt{|t|}} \tag{7.4.14}$$

用时域 GTD 来分析体积波,推导得到其衍射波表达式为

$$\Phi^{\mathrm{diff}}(r,t) = |A^{\mathrm{diff}}(R_\beta,\rho)|\,\Phi^{\mathrm{inc}}(r',t-\frac{R_\beta}{c_\beta}) * T(t,D_\alpha^\beta,R_\beta,c_\beta) \tag{7.4.15}$$

式中,脉冲信号 $T(t,D_\alpha^\beta,R_\beta,c_\beta)$为

$$\begin{aligned}T(t,D_\alpha^\beta,R_\beta,c_\beta) = {} & \overline{D}_\alpha^\beta\sqrt{\frac{c_\beta}{t}}\left[\Pi(t,R_\beta,c_\beta)\cos\left(\varphi(D_\alpha^\beta) - \frac{\pi}{4}\right)\right. \\ & \left. - \Pi(-t,R_\beta,c_\beta)\sin\left(\varphi(D_\alpha^\beta) - \frac{\pi}{4}\right)\right]d_\beta^\alpha\end{aligned} \tag{7.4.16}$$

类似所产生的表面瑞利波可以表示为

$$\Phi_R^{\text{diff}}(r_c,t) = |A(R_R,\rho)|\overline{D}_\alpha^R(\theta_\alpha)\Phi^{\text{inc}}(r',t-\frac{R_R}{c_R})$$
$$*\left[\delta(t)\cos\left(\varphi(D_\alpha^R)-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\pi t}\sin\left(\varphi(D_\alpha^R)-\frac{\pi}{4}\right)\right]d_R^\alpha$$

7.4.3　衍射与接收过程

简单衍射不考虑表面波的影响，作为其补充，多重衍射考虑表面波的影响。

简单衍射没有涉及瑞利波。对直线边缘即裂纹近远两端，探头表面的接收场由式(7.4.15)表达的势场的积分给出：

$$\Phi^{\text{rec}}(t) = \iint_\Sigma \sum_{l=\text{far}}^{l=\text{near}} C_{T21}(\theta_{i2})\Phi^{\text{inc}}\left(r',t-\frac{R_\beta^l}{c_\beta}\right)$$
$$* |A^{\text{diff}}(R_\beta^l)|\,T(t,D_\alpha^\beta,R_\beta^l,c_\beta)\mathrm{d}\sigma \tag{7.4.17}$$

式中，α 与 β 表示体积波波形；角标 near 与 far 分别表示较近裂纹尖端和较远裂纹尖端。其中

$$|A^{\text{diff}}(R_\beta^l)| = (R_\beta^l)^{-\frac{1}{2}} = \left(r_2^{l,\text{diff}} + r_1^{l,\text{diff}}\frac{c_1}{c_2}\frac{\cos^2\theta_{i2}}{\cos^2\theta_{i1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{7.4.18}$$

其中，θ_{i1} 和 θ_{i2} 分别表示衍射声束传播过程中在介质 1 和 2 中的入射角和折射角；$r_1^{l,\text{diff}}$ 与 $r_2^{l,\text{diff}}$ 分别是与裂纹近远两端衍射后水和工件中的传播路径。

对于 GTD 可得到相同的公式，所以

$$\Phi^{\text{rec}}(t) = \iint_\Sigma \sum_{h=\text{far},l=\text{far}}^{h=\text{near},l=\text{far}} \Phi^{\text{inc}}\left(r^h,t-\frac{R_\beta^l}{c_\beta}-\frac{L_{\text{crack}}}{c_R}\right)$$
$$* \sum_{R=R_S}^{R_A} C_{T21}(\theta_{i2})\,|A^{\text{diff}}(R_\beta^l)|\,T(t,D^R,R_\beta^l,c_\beta)\mathrm{d}\sigma \tag{7.4.19}$$

式中

$$D^R = D_\alpha^R(\theta_R^h;\theta_\alpha^R)D_R^\beta(\theta_\beta^R;\theta_R^l) = \overline{D}^R e^{j\varphi(D^R)} \tag{7.4.20}$$

R_S、R_A 分别为不同类型的表面波。忽略垂直入射$\left(\varphi\approx\frac{\pi}{2}\right)$时瑞利表面波的反射，在背散射场中这种反射是可以忽略的。

接收信号与入射到探头表面的总压力成比例，ρ_1 是水的比重

$$\overline{p}(t) = -\rho_1\frac{\partial}{\partial t}\Phi^{\text{rec}}(t) \tag{7.4.21}$$

根据上述衍射模型，可以采用图 7.14 给出的计算流程图计算接收探头所接收到的裂纹尖端衍射信号。对于直通波的计算要考虑到表面裂纹的情况，如图 7.15(a)所示，发射探头发射的超声波在工件表面形成直通波，遇到表面裂纹时，直通波被阻挡，此时可以忽略直通波的计算，直接令直通波信号为零。在计算底面回波信号

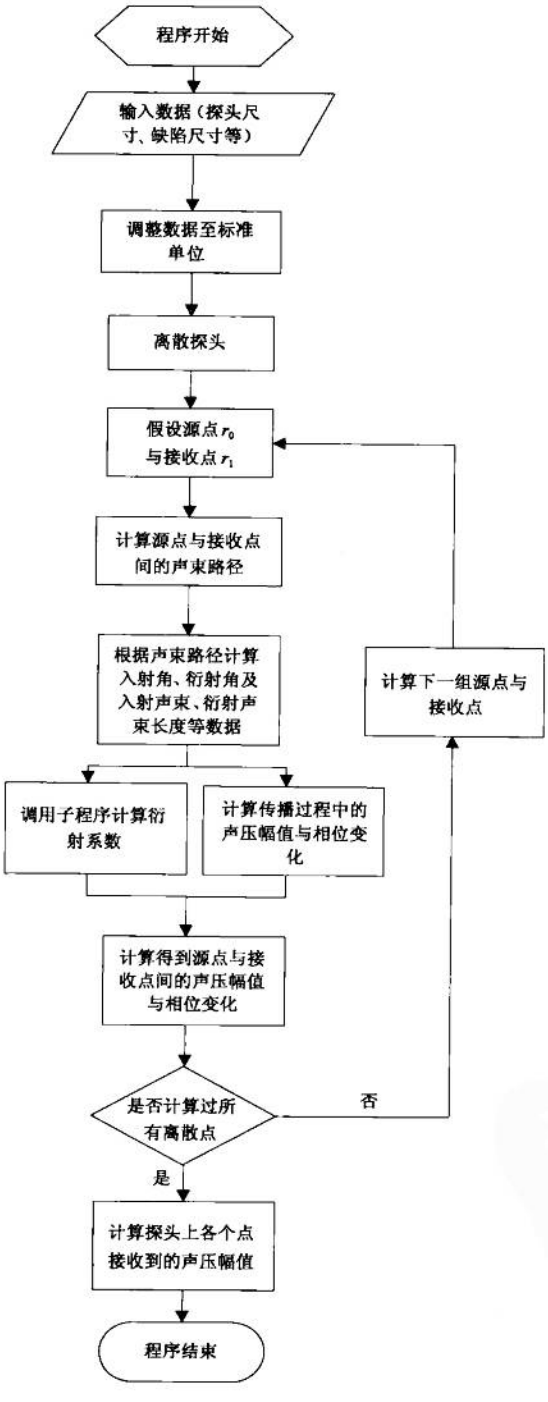
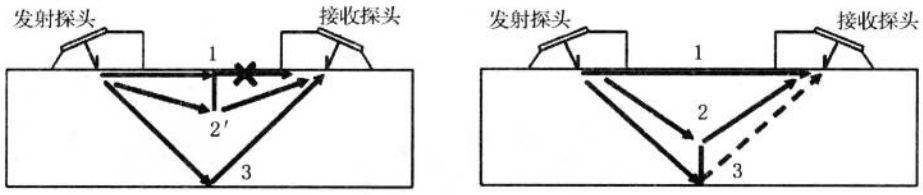


图 7.14 半解析法计算流程图

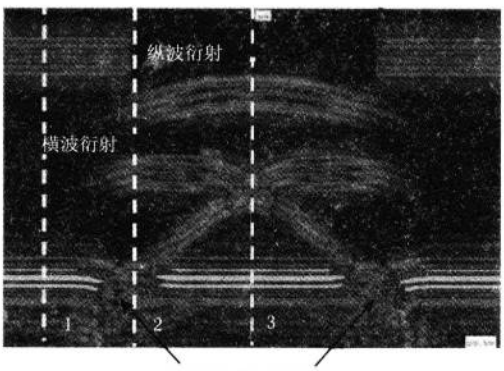
时，需要考虑到阴影效应，即裂纹阻挡部分超声波的传播，其中底面裂纹的阴影效应最为明显，如图 7.15(b)所示。



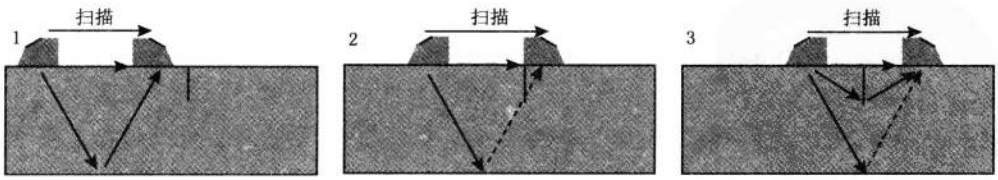
(a) 表面裂纹　　(b) 底面裂纹

图 7.15　TOFD 检测特殊位置裂纹时的计算示意图

以表面裂纹为例，TOFD 检测结果会同时出现直通波为零和阴影效应。如图 7.16 所示，在探头组处于位置 1 时，直通波未被阻隔。随着探头组的移动，接收探头刚刚处于裂纹另一侧，使得直通波被阻隔，此时的地面回波也因为裂纹的影响而出现阴影。探头组继续移动时，直通波仍然被阻隔，显示为零，但是底面回波再次出现。因此，会得到图 7.16(a)中的 B 显图形。



(a) TOFD检测的B显图形

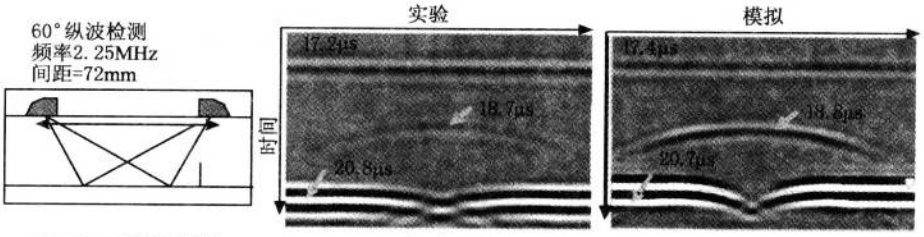


(b) TOFD检测过程

图 7.16　半解析法模拟 TOFD 检测

为验证模型的准确性，将半解析法模型应用于实际检测过程，并将计算结果与实验结果进行对比得到图 7.17。探头组采用的是 60°纵波探头，中心频率为

2.25MHz，探头组间的距离为 72mm，工件中的缺陷为底面裂纹，如图 7.17(a)所示。由图 7.17(b)、(c)可见，实验结果与计算结果相吻合，尤其是其中的衍射回波的位置和相位与实验结果吻合较好。底面回波信号的阴影效应在 B 显图形中也可以看到。



(a) TOFD检测示意图　(b) 实验B显结果　(c) 半解析法计算结果

图 7.17　半解析法计算结果与实验结果的对比

7.5　有限元法

根据 TOFD 检测的特点，用有限元法模拟时需要考虑到以下三个方面[12]：含缺陷的工件中的超声波的传播；探头晶片的振动；探头楔块中超声波的传播。

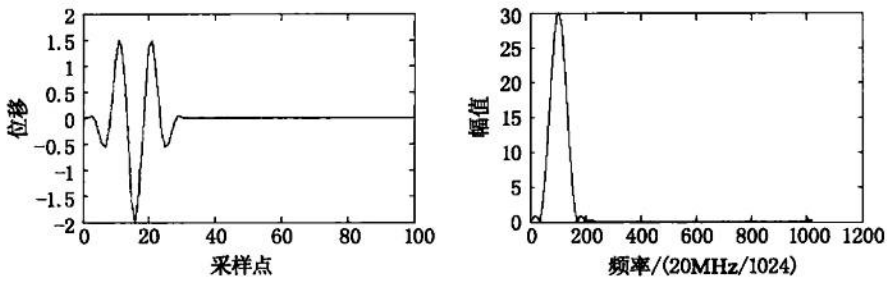
对于含有缺陷的工件中超声波的传播过程的模拟，工件被分为两个不同的区域，其中非缺陷部分定义为网格单元，而缺陷区域为无网格单元。整个工件区域用 Plane42 单元进行划分，即四节点，二维平面应变单元。根据收敛性条件，单元步长选为 $\lambda/12$，其中的 λ 为超声波在工件中的波长。

对于探头晶片的振动的模拟，首先需要了解探头晶片的振动方式。通常用瞬态激励脉冲来模拟探头晶片的振动，常用的脉冲方程为

$$F(t)=\begin{cases}\left[1-\cos\left(\frac{2}{3}\pi ft\right)\right]\cos(2\pi ft), & 3/f\geqslant t\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{7.5.1}$$

式中，f 为探头的中心频率。中心频率为 2MHz 的脉冲信号如图 7.18 所示，其中图 7.18(a)为时域信号，图 7.18(b)为对应的频域信号，其采样点数为 1024，采样频率为 20MHz。将脉冲载荷加载于探头与工件接触的节点上，用以模拟晶片的振动。

TOFD 检测所用的探头组都是斜探头，所以模拟过程中要考虑到楔块的影响。但是如果直接考虑楔块的有限元会增加整个模型的节点数而增加计算量，同时会使问题复杂化，例如耦合介质不能被忽略，否则就会产生实际过程中不存在的横波入射。为了简化计算，假设：超声波在楔块中无衰减，即晶片上的振动等同于



(a) 时域信号　　(b) 频域信号

图 7.18　探头晶片的振动信号

楔块表面的振动；不考虑超声波在楔块中的传播时间差，使得不同信号（如直通波和底面回波）到达接收探头的时间不会因为楔块的影响而改变；只考虑超声波在探头与工件界面处的折射，忽略反射等效果。

在考虑接收探头的模拟时，需要考虑到在探头与工件接触面上各节点的时间延迟，如图 7.19 所示。

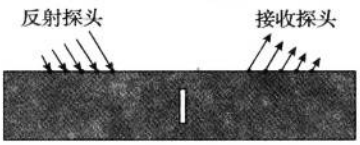
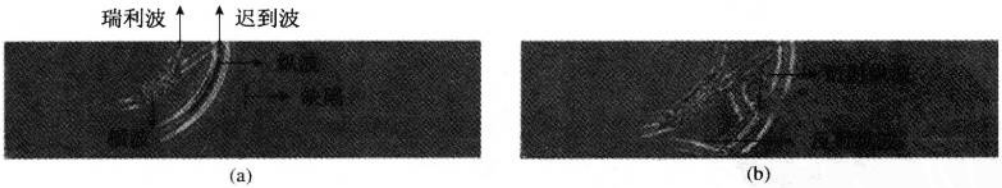


图 7.19　有限元模拟 TOFD 检测的示意图

在 10mm 厚的铝板中设置 0.4mm 宽的缺陷，长度分别为 6.5mm、3.25mm、1.6mm 和 0.8mm。图 7.20 显示的有限元法模拟的是不同时间点的瞬态声压分布，图 7.20(a)为 2.4μs 时的声压分布，图 7.20(b)为 3.2μs 时的声压分布。从图 7.20(a)可以看出直通波和瑞利波沿着工件表面传播，图 7.20(b)中可以看到纵波的衍射回波比较明显，而几乎看不到横波的衍射波。



(a)　　(b)

图 7.20　有限元法模拟超声波的瞬态图

对四种含不同缺陷的工件使用一组 60°的斜探头做 TOFD 检测，探头的中心频率为 5MHz。图 7.21 为有限元法计算得到的信号与实验所得信号的比较，可见两组信号间的差距不大。其中实线表示的是有限元算法得到的 A 显射频信号，而虚线代表的是实验所得的 A 显射频信号。

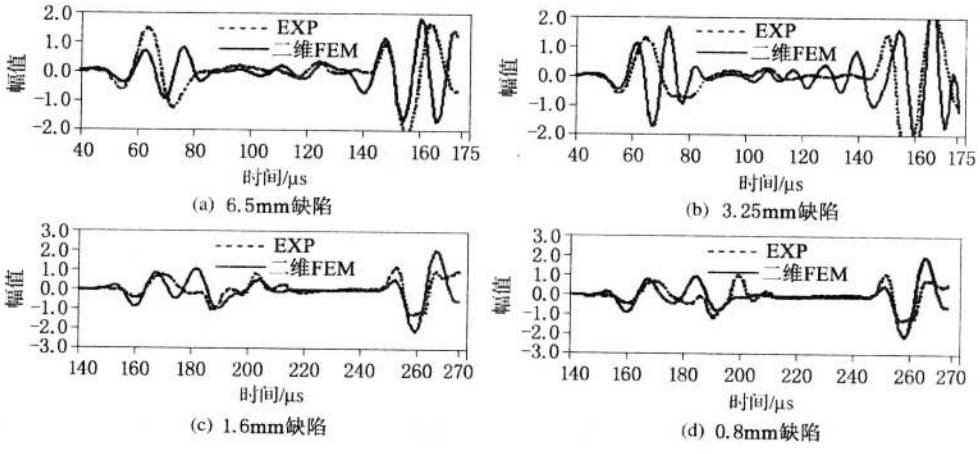


图 7.21 有限元计算结果与实验结果的对比

通过分别分析实验所得信号和有限元法计算得到的信号，对缺陷进行定量，再与实际缺陷尺寸进行对比可以比较试验和计算所得信号的精度。表 7.2 显示的是试验和计算所得定量数据间的比较，其中括弧内为差值百分比。

表 7.2 有限元计算数据与实验数据的对比结果

项 目	实际尺寸			
	6.48mm	3.26mm	1.59mm	0.78mm
实验数据	6.42(0.93)	3.21(1.53)	1.62(1.89)	0.76(2.56)
计算数据	6.45(0.46)	3.17(1.24)	1.64(1.23)	0.77(1.28)

图 7.22 为工件内部的缺陷不垂直于工件表面时，用有限元法计算得到 2.4μs 时和 3.2μs 时的工件内部的声场分布瞬态图。其中缺陷与工件表面的夹角为 45°，图 7.22(a)为 2.4μs 时的瞬态声压分布图，图 7.22(b)为 3.2μs 时的瞬态声压分布图。

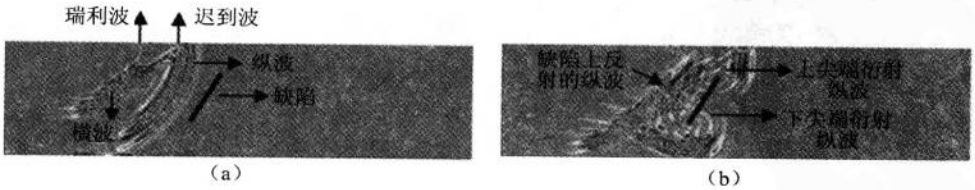


图 7.22 倾斜缺陷的瞬态声压分布图

表 7.3 显示的是分析试验数据和计算数据所得定量结果间的比较，其中括弧内为差值百分比。

表 7.3　有限元计算数据与实验数据的对比结果

项　目		实际尺寸			
		6.48mm	3.26mm	1.59mm	0.78mm
实验数据	尺寸	6.34(2.16)	3.28(0.63)	1.54(3.14)	0.76(2.56)
	角度	42°	40°	43°	39°
计算数据	尺寸	6.38(1.54)	3.10(4.90)	1.62(1.25)	0.77(1.28)
	角度	42°	41°	41°	40°

参 考 文 献

[1] Baskaran G, Balasubramaniam K, Rao C L. Shear-wave time of flight diffraction (S-TOFD) technique[J]. NDT&E International, 2006, 39: 458-467.

[2] Farseer. 几何光学[EB/OL]. 2008-02-21. http://baike.baidu.com/view/47623.htm?fr=topic.

[3] Keller J B. Diffraction by an aperture[J]. Journal of Applied Physics, 1957, 28: 426.

[4] Baskaran G, Balasubramaniam K, Krishnamurthy C V, et al. Ray based model for the ultrasonic time-of-flight diffraction simulation of thin walled structure inspection[J]. ASME Journal of Pressure Vessel Technology, 2005: 127.

[5] Achenbach J D, Gautesen A K, McMaken H. Ray Methods for Waves in Elastic Solids with Applications to Scattering by Cracks[M]. London: Pitman Advanced Publishing Program: 143-148.

[6] Chapman R K. A System Model for the Ultrasonic Inspection of Smooth Planar Cracks CEGB report No. SSD/RR: 145, 81, 1981.

[7] Lavoine J. Transformation de Fourier des pseudo fonctions avec table de nouvelles transformmees[M]. Paris: CNRS, 1963.

[8] MacMaken H. Three Dimensional Diffraction by Cracks in Elastic Solids[D]. Evanston: Northwestern University, 1980.

[9] Darmon M, Chatillon S, Mahaut S, et al. Simulation of disoriented flaws in a TOFD technique configuration using GTD approach [C]. Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation: 34th Annual Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, 2008, 975: 155-162.

[10] Mahaut S, Darmon M, Benoist Ph, et al. TOFD simulation tools in CIVA software [C]. NDT2007, Glasgow, 2007.

[11] Butin L, Lhemery A, Calmon P. A model for predicting effects of surface wave propagation on the echo response from planar crack. Ultrasonics, 1998, 36: 133-140.

[12] Baskaran G, Rao C L, Balasubramaniam K. Simulation of the TOFD technique using the finite element method [J]. Insight NDT and Condition Monitoring, 2007, 49(11): 641-646.

第 8 章　超声相控阵

超声相控阵技术已有二十多年的发展历史。初期主要应用于医疗领域，医学超声成像中用相控阵换能器快速移动声束对被检器官成像，利用其可控聚焦特性局部升温热疗治癌，使目标组织升温并减少非目标组织的功率吸收。最初，系统的复杂性、固体中波动传播的复杂性及成本费用高等原因使其在工业无损检测中的应用受限。然而随着电子技术和计算机技术的快速发展，超声相控阵技术逐渐应用于工业无损检测，特别是在核工业及航空工业等领域。如核电站主泵隔热板的检测；核废料罐电子束环焊缝的全自动检测及薄铝板摩擦焊焊缝热疲劳裂纹的检测。近几年，超声相控阵技术发展尤为迅速，在相控阵系统设计、系统仿真、生产与测试和应用等方面取得一系列进展，如采用新的复合材料压电换能器改善电声性能；奥氏体焊缝、混凝土和复合材料等的超声相控阵检测。R/D-TECH、SIEMENS 及 IMA2SONIC 等公司已生产出了超声相控阵检测系统及相控阵换能器，而动态聚焦相控阵系统，二维阵列、自适应聚焦相控阵系统，表面波及板波相控阵换能器和基于相控阵的数字成像系统等的研制、开发、应用及完善已成为研究重点。其中，自适应聚焦相控阵技术尤为突出，它利用接收到的缺陷回波信息调整下一次激发规则，实现声束的优化控制，提高缺陷（如厚大钛锭中的小缺陷或埋藏较深的大缺陷）的检出率。

8.1　超声相控延迟法则

超声相控阵换能器是由一组相对独立的压电晶片组成，每个独立的晶片都能发射超声波波束。按照不同的规则激发所有晶片或是部分晶片，使得各晶片所发射的超声波波束叠加形成不同的波阵面[1,2]。同样，接收信号的过程中，能够按照相应的规则对信号进行延迟处理，并以适当的形式显示出来（见图 8.1）。

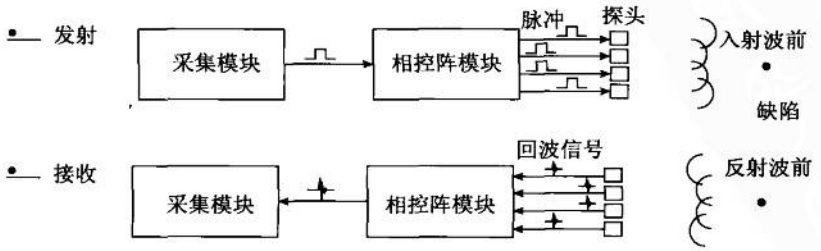


图 8.1　超声相控阵声束的发射和接收

超声相控阵的原理决定了其特点是能有效地控制所发射超声波波束的声压分布，达到偏转、聚焦及扫描等效果。如图 8.2 所示，相控阵换能器各晶片从左到右依次激发，左边的晶片延迟时间最短，右边延迟时间最长，延迟法则使得叠加后波阵面发生偏转和聚焦。因此，相控阵换能器在实际超声检测过程中能提高检测速度、简化扫查设备、解决空间限制等问题。



图 8.2　相控阵的延迟法则所产生的声束偏转和聚焦

要实现相控阵声场的计算，首先要正确模拟晶片激发延迟时间。以一维线形阵列为例，设激发晶片数为 N，并将晶片编号为 $n(n=0,1,2,\cdots,N-1)$，晶片 0 为左起第一个晶片，控制声束偏转角为 θ，焦距为 f，相邻两晶片的中心间距为 d，晶片 n 的延迟记为 t_n，则晶片位置、延迟、焦距和偏转角度应该满足以下关系式：

$$f-(t_n-t_0)c=\sqrt{(f\cos\theta)^2+\left(f\sin\theta-nd-\frac{N-1}{2}d\right)^2} \tag{8.1.1}$$

解方程(8.1.1)可得 t_n 的表达式：

$$t_n=t_0+\frac{f}{c}\left\{1-\sqrt{1+\left[\frac{d}{f}\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right]^2-2\sin\theta\frac{d}{f}\left(n-\frac{N-1}{2}\right)}\right\} \tag{8.1.2}$$

记晶片 n 到焦点的距离为 r_n，根据几何关系可知，当 $r_0\gg nd$ 时，可有 r_n 的近似式：

$$r_n=\sqrt{r_0+(nd)^2-2r_0nd\sin\theta}\approx r_0-\frac{nd\sin\theta+(nd)^2\cos^2\theta}{2r_0} \tag{8.1.3}$$

将式(8.1.2)中的根号部分作类似式(8.1.3)的简化，最终得到

$$t_n=nt_0+\frac{ct_0^2}{2f\tan^2\theta}(nN-n^2-n) \tag{8.1.4}$$

由式(8.1.4)可看出，对于偏转角为 0°时，简化式(8.1.4)不适用，此时采用式(8.1.2)计算各晶片的延迟。

图 8.3 为几种典型的超声相控阵换能器，图 8.3(a)为一维线形阵列，能控制声束在二维空间中偏转、聚焦；图 8.3(b)为一维环形阵列，能控制声束在换能器中心法线上不同深度的聚焦，但是不能控制声束的偏转；图 8.3(c)为二维线形阵列，

能控制声束在三维空间中偏转、聚焦；图 8.3(d)为二维环形阵列，能控制声束在三维空间中偏转、聚焦；图 8.3(e)为环绕阵列，能控制声束在环形阵列平面内偏转、聚焦，该阵列可用于大曲率部位的扫查。

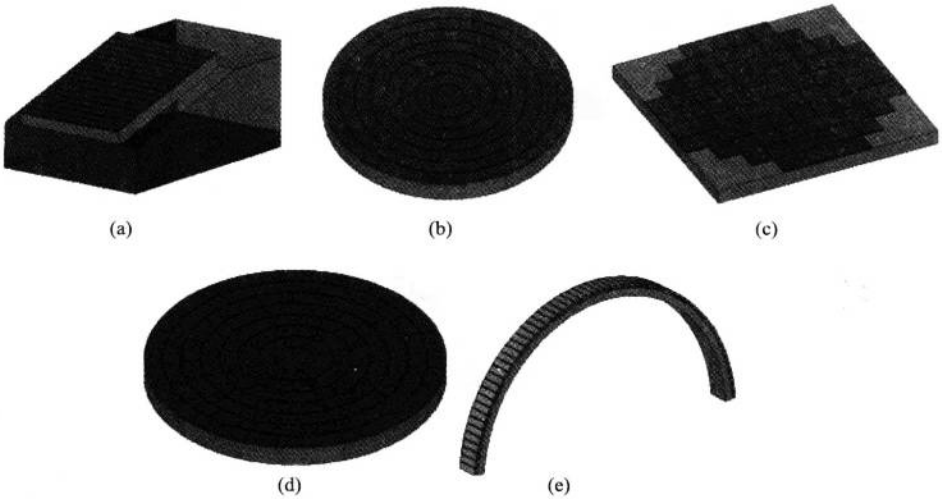


图 8.3 超声相控阵换能器

8.2 半解析法

8.2.1 瑞利积分法

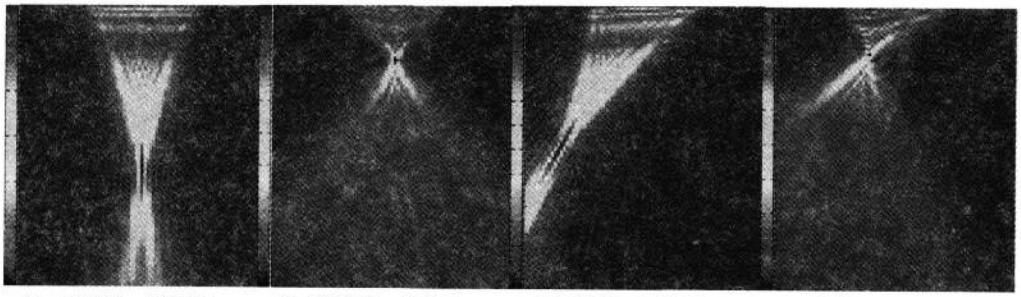
用延迟修正瑞利积分得到相控阵探头的发射声场[1]：

$$\varphi(r,t)=\sum_{n=0}^{N-1}\iint_{T}\frac{\mathrm{DF}D v_n\left(r_{\mathrm{T}},t-\dfrac{|r-r_{\mathrm{T}}|}{c+t_n}\right)}{2\pi|r-r_{\mathrm{T}}|}\mathrm{d}S(r_{\mathrm{T}}) \tag{8.2.1}$$

式中，T 表示积分区域为探头表面。

根据式(8.2.1)对相控阵的发射声场进行编程计算，程序见附录 6。利用该程序计算相控阵探头在工件中的发射声场，如图 8.4 所示。其中相控阵探头的参数有：激活的晶片数为 64，相邻晶片间距离为 0.6mm，探头频率为 5MHz，单个晶片宽度为 10mm，工件中的声速为 5890m/s。

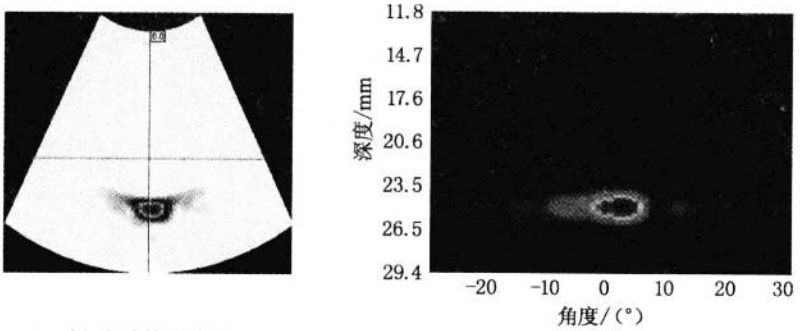
同时，利用瑞利积分法计算相控阵检测某横孔所得的反射信号，并与实验结果进行比较。采用相控阵探头的参数为：相邻晶片间距为 0.6mm，单个晶片长 0.5mm，宽 10mm，探头频率为 5MHz；设置扫描参数为：一次激发 16 晶片，声束扫



(a) 偏转0°，焦距60mm　(b) 偏转0°，焦距20mm　(c) 偏转30°，焦距60mm　(d) 偏转30°，焦距20mm

图 8.4　相控阵探头的发射声场

描范围为－30°～＋30°，聚焦深度设定为 50mm；工件参数为：横通孔的直径为 5mm，孔的中心距离上表面 25mm，纵波声速为 5890m/s。声束扫描到每一个角度上都会与缺陷相互作用并得到相应的 A 显信号，将 A 显信号顺序排列得到 B 显图像。图 8.5(a)为实验测得数据，图 8.5(b)为使用上述模型计算得到的数据，实验所得图形与模型计算得到的图形一致。



(a) 实验检测结果　(b) 模型计算结果

图 8.5　实验结果与计算结果的对比

8.2.2　高斯法

瑞利积分法虽然能准确计算超声声场，但是其计算量较大，计算速度较慢；多元高斯声束叠加法能提高计算速度。然而多元高斯声束叠加法采用的是近轴近似，仅能保证主声束附近的精度。因此，普通的多元高斯声束叠加法无法准确模拟相控阵发射声束的偏转。Park 等已对上述局限性做了验证。对普通高斯声束叠加法的修正可以使其应用于相控阵声束的计算[4]。

1. 近轴近似多元高斯声束叠加法

在普通的多元高斯声束模型中，假设在 Oxy 平面上，$z \geqslant 0$ 的区域为液体介

质，换能器的表面点垂直方向上的振动表示为高斯叠加的形式：

$$\frac{v_z(x,y,z=0)}{v_0} = A\exp(-B(x^2+y^2)) \tag{8.2.2}$$

式中，v_0 是换能器表面的振动速度；A 和 B 项为常数。高斯声束沿着 z 轴传播时，发射声束声场为

$$\frac{p(x,y,z)}{\rho c v_0} = A\left[\frac{q_x q_y}{(q_x+z)(q_y+z)}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{ik}{2}\left(\frac{x^2}{z+q_x}+\frac{y^2}{z+q_y}\right)\right)\exp(ikz) \tag{8.2.3}$$

式中，ρ 为液体介质的密度；c 为液体介质中的波速；q 为与声束的角频率 ω 和探头曲率半径 R 相关的参数；k 为波数；

$$\frac{1}{q_x} = \frac{1}{q_y} = \frac{1}{R} + \frac{2i}{k\omega^2} \tag{8.2.4}$$

高斯声束相位的线性变化会引起高斯声束的偏转，并且能保证近轴近似仍然适用。对原高斯速度场的修正为

$$\frac{v_z(x,y,z=0)}{v_0} = A\exp(-B(x^2+y^2))\exp(ik(C_x x + C_y y)) \tag{8.2.5}$$

式中，线性相位项

$$C_x = \sin\theta\cos\phi$$
$$C_y = \sin\theta\sin\phi$$

其中，θ、ϕ 为方位角，如图 8.6 所示。

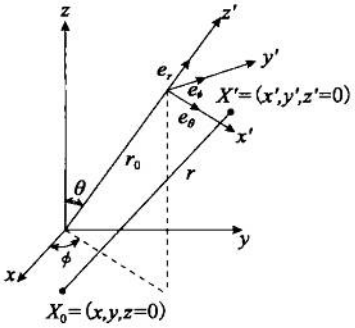


图 8.6 线形相变后的近轴近似

将该速度场应用于瑞利积分，可得声压分布：

$$p_l(X') = \frac{-i\omega\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_z(x_0)\frac{\exp(ikr)}{r}dxdy \tag{8.2.6}$$

式中，下标“l”表示线性阵列。

如图 8.7 所示，此时，距离 r 按近轴近似的二阶展开式为

$$r \approx r_0 + \frac{x^2(1-\sin^2\theta\cos^2\phi)}{2r_0} - x\sin\theta\cos\phi - \frac{xx'\cos\theta\cos\phi}{r_0} + \frac{xy'\sin\phi}{r_0} + \frac{(x')^2}{2r_0} + \frac{y^2(1-\sin\theta\sin\phi)}{2r_0} - y\sin\theta\sin\phi - \frac{yy'\cos\phi}{r_0} - \frac{yx'\cos\theta\sin\phi}{r_0} + \frac{(y')^2}{2r_0} - \frac{xy\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi}{r_0} \tag{8.2.7}$$

将 x、y 轴写成旋转坐标可以简化式(8.2.7)

$$x = u\cos\phi - v\sin\phi$$

$$y = u\sin\phi + v\cos\phi$$

$$r \approx u^2\cos^2\theta - 2ux'\cos\theta - 2vy' + (x')^2 + (y')^2 \tag{8.2.8}$$

将式(8.2.8)代入式(8.2.6)中，并简化得到

$$\frac{p_l(x,y,z)}{\rho c v_0} = \frac{A}{\cos\theta}\left[\frac{q_{x'}q_{y'}}{(q_{x'}+r_0)(q_{y'}+r_0)}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{ik}{2}\left(\frac{x'^2}{q_{x'}+r_0} + \frac{y'^2}{q_{y'}+r_0}\right)\right)\exp(ikr_0) \tag{8.2.9}$$

式中

$$q_{x'} = q_x\cos^2\theta = \frac{-ik}{2B}\cos^2\theta$$

$$q_{y'} = q_y$$

比较式(8.2.3)和式(8.2.9)可得

$$p_l(x',y',r_0,q_{x'},q_{y'}) = \frac{1}{\cos\theta}p(x\to x', y\to y', z\to r_0, q_x\cos^2\theta, q_y) \tag{8.2.10}$$

式(8.2.10)的右边是用式(8.2.3)的形式写出的，只是使用了相应的替换。对于平面波的传播，式(8.2.10)可以写成速度场的形式：

$$v_{z'}(x',y',r_0,q_{x'},q_{y'}) = \frac{1}{\cos\theta}v_z(x\to x', y\to y', z\to r_0, q_x\cos^2\theta, q_y) \tag{8.2.11}$$

式中，$v_{z'}$ 是指高斯声束偏转方向上的振动速度。由式(8.2.10)或式(8.2.11)可以得出以下结论：高斯声束的线性相位变化会导致高斯声束的偏转，且幅值的变化量为 $1/\cos\theta$。

将线性相位变化的高斯模型应用于相控阵发射声场的计算时，需要考虑到相控阵换能器晶元尺寸的影响。该因素的影响与幅值变化量 $1/\cos\theta$ 同样重要，且表示为

$$D(a/\lambda,\theta) = \frac{\sin\frac{ka\sin\theta}{2}}{\frac{ka\sin\theta}{2}} \tag{8.2.12}$$

式中，a 为晶元尺寸；λ 为介质中波长。因此多元高斯阵列声束模型表示为

$$V_a^{\mathrm{MGA}}(x',y',r_0)=\frac{D(a/\lambda,\theta)}{\cos\theta}\sum_{j=0}^{N-1}V_j^a(x',y',z_j')\exp(\mathrm{i}\omega t_j) \quad (8.2.13)$$

式中，N 为相控阵换能器的晶元总数；t_j 为各晶元的延迟。

采用瑞利积分法和多元高斯阵列声束模型分别计算相控阵换能器的发射声场，并比较声束轴线上的声压分布，得到图 8.7，其中实线为瑞利积分法计算得到的声压分布曲线，虚线为多元高斯阵列声束模型计算得到的声压分布曲线；图 8.7(a)、(b)所示均为纵波入射到钢、聚焦深度为 150mm 的曲线图。图 8.7(a)对应偏转角 27°，$a/\lambda=0.628$ 的情况，图 8.7(b)对应偏转角 10°，$a/\lambda=1.5$ 的情况。图 8.7(c)为在相同情况下，两种算法得出的沿主声束方向距离换能器 80mm 处的声压分布图。总之，两种算法的结果比较吻合。

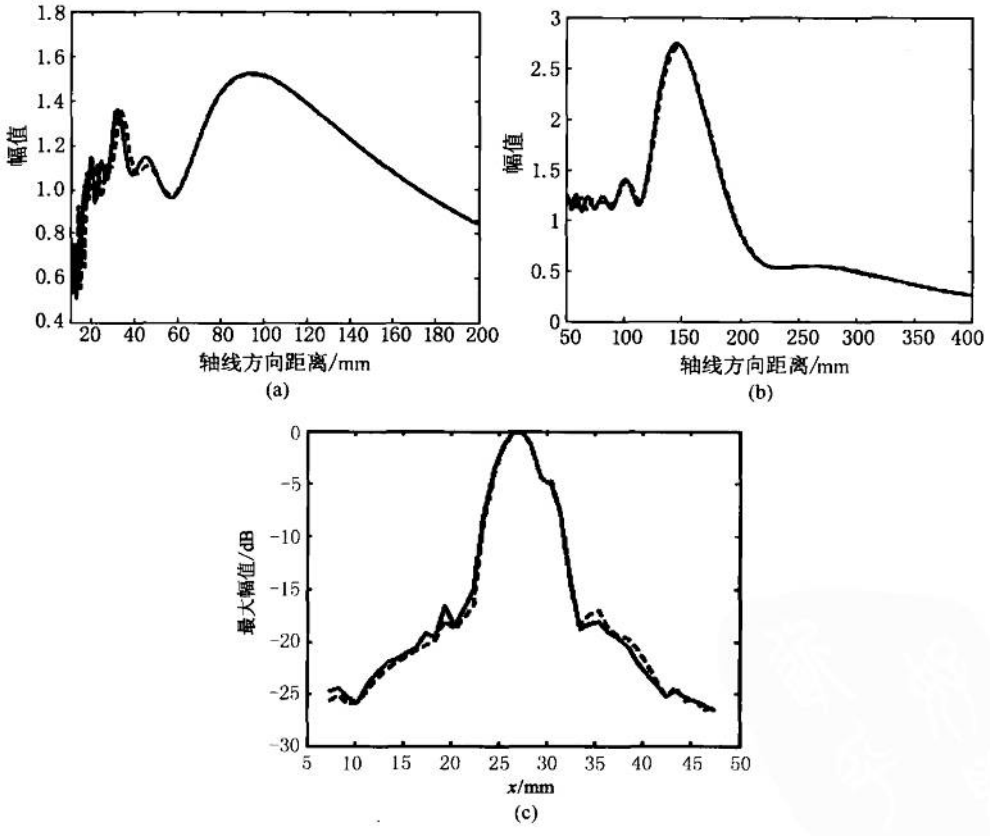


图 8.7 瑞利积分法和多元高斯阵列声束叠加法计算结果对比图

2. 非近轴近似多元高斯声束叠加法[5]

由于近轴近似的影响，普通的多元高斯声束模型无法准确模拟相控阵换能器的发射声场，尤其是声束大角度偏转时的发射声场。现采用非近轴近似多元高斯声束叠加法来解决普通多元高斯声束模型无法计算相控阵换能器偏转声束的问题。

式(8.2.7)是计算点 X' 到晶片中任意点距离 r 的近轴近似展开，而非近轴近似多元高斯声束叠加法是将 r 做如下展开：

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}\approx R+\frac{{x_0}^2+{y_0}^2-2xx_0-2yy_0}{2R} \tag{8.2.14}$$

式中，$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；(x,y,z) 为计算点坐标；(x_0,y_0,z_0) 为换能器上任意点的坐标。

为了减少计算量，同时保证计算精度，对式(8.2.6)中的距离项和指数项 r 分别用 $r=R$ 和 $r=R+(x_0^2+y_0^2-2xx_0-2yy_0)/(2R)$ 代替，即可得到非近轴近似高斯声束方程：

$$\begin{aligned}p(r,\omega)=&-\frac{\mathrm{i}\omega\rho}{2\pi}\int_{S_0}\sum_{n=1}^{10}\sum_{l=1}^{10}A_nA_l\exp\left(-\frac{B_n{x_0}^2}{{a_1}^2}-\frac{B_l{y_0}^2}{{a_2}^2}\right)\\&\times\exp\left(\mathrm{i}k\frac{{x_0}^2+{y_0}^2-2xx_0-2yy_0}{2R}\right)\mathrm{d}S_0\\=&\rho c\sum_{n=1}^{10}\sum_{l=1}^{10}\frac{A_nA_l\exp(\mathrm{i}kR)}{\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{i}B_nR}{D_1}}\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{i}B_lR}{D_2}}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}k}{2}\frac{\dfrac{x^2}{R}}{1+\dfrac{\mathrm{i}B_nR}{D_1}}\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}k}{2}\frac{\dfrac{y^2}{R}}{1+\dfrac{\mathrm{i}B_lR}{D_2}}\right)\end{aligned} \tag{8.2.15}$$

式中，$D_1=\dfrac{k{a_1}^2}{2}$；$D_2=\dfrac{k{a_2}^2}{2}$；A、B 为迭加系数；$2a_1$、$2a_2$ 为矩形晶片单元边长。

再根据惠更斯原理计算得到相控阵换能器的发射声场

$$p_l(r,\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}p(r,\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t_n) \tag{8.2.16}$$

式中，N 为相控阵换能器的晶元总数；t_n 为各晶元的延迟。

采用瑞利积分法(RSI)、普通的多元高斯法(MGB)和非近轴近似的多元高斯法(NMGB)计算同一情况下相控阵换能器的发射声场，如图 8.8 所示。其中换能器的参数为：中心频率 5MHz，单一晶元的尺寸为 0.49mm×10mm，相邻晶元间隙为 0.1mm，晶元总数为 64，传播介质为普通碳钢，换能器发射声束的偏转角为 30°，聚焦深度为 69mm。由图 8.9 可见，NMGB 所得计算结果与 RSI 结果比较

吻合。

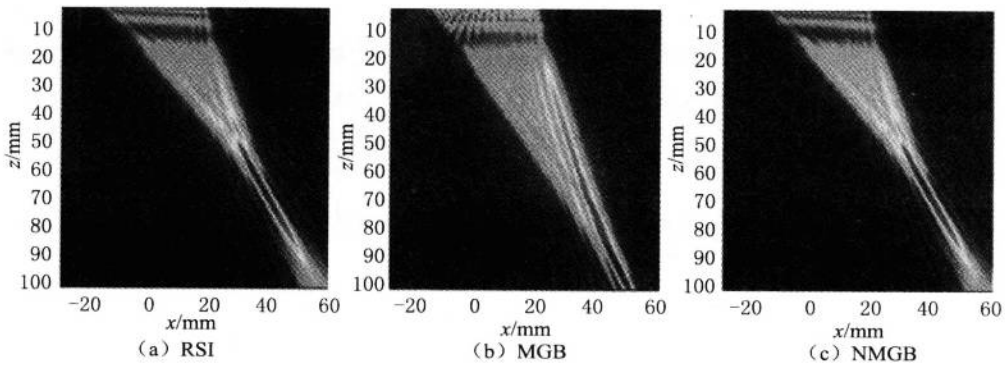


图 8.8 三种模型计算结果对比图

8.3 数 值 法

不同于普通单晶换能器声场的数值计算，相控阵换能器发射声场的数值计算需要对其加载不同的延迟，以时域有限差分法为例，其加载如图 8.9 所示。由于相控阵换能器栅瓣的影响，网格的划分考虑普通超声波模拟要求的同时需要考虑换能器晶元间的间隙尺寸[3]：

$$\Delta x \leqslant \zeta \lambda_{\min} = \frac{\zeta c}{f_{\max}} \tag{8.3.1}$$

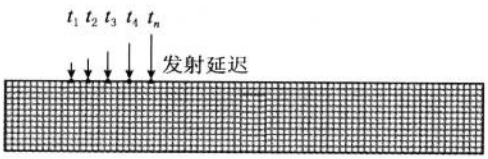


图 8.9 数值法模拟时的发射延迟和接收延迟

式中，c 是介质中的波速；$\lambda_{\min}$ 是指最小波长；$f_{\max}$ 是最大频率；ζ 是常数。ζ 的取值取决于质量矩阵，相容质量矩阵取 $\zeta=0.25$，集总质量矩阵取 $\zeta=0.2$。模拟超声波时，时间增量的选择与时间常数有关，时间常数 τ 由下式确定

$$\tau \leqslant \Delta x / c \tag{8.3.2}$$

式中，Δx 由式(8.3.1)计算得到。现计算一具体的相控阵换能器发射声场，其换能器中心频率 5MHz，单一晶元的尺寸为 0.49mm×10mm，相邻晶元间隙为 0.1mm，晶元总数为 64；工件为普通碳钢，其纵波声速为 5900m/s。超声波检测要求其网格不大于 0.1225mm，而其晶元间隙为 0.1mm，所以网格尺寸应不大于

0.1mm。图 8.10 为上述条件下有限差分法计算得到的发射声场瞬态图。考虑相控阵换能器接收回波信号时，也需要在加载处添加相应的时间延迟。



图 8.10　数值法计算结果

参 考 文 献

[1] 张益成，丁辉，张俊等. 相控阵超声检测计算模型的建立[J]. 武汉大学学报(工学版)，2009，42：525-527.

[2] 李衍. 超声相控阵技术[J]. 无损探伤，2008，32：31-35.

[3] Satyanarayan L，Mohan K V，Krishnamurthy C V，et al. Finite difference time domain simulation of ultrasonic phased array sector scan for imaging embedded defects in blocks and elbows[C]. Proceedings of National Seminar on Non-Destructive Evaluation，Dec. 7-9，2006：395-402.

[4] Huang R J，Schmerr L W Jr，Sedov A. Modeling the radiation of ultrasonic phased-array transducers with Gaussian beams[J]. Ultrasonic，Ferroelectrics and Frequency Control，2008，55(112)：3692-3702.

[5] Zhao X Y，Gang T. Nonparaxial multi-Gaussian beam models and measurement models for phased array transducers[J]. Journal of the Acoustical Society of America，2006，119(4)：1971-1978.

第 9 章　生物组织中的超声传播

超声波在生物医学方面主要用于诊断、治疗和手术，其中超声诊断发展最快。20 世纪 80 年代的超声诊断基本处于定性观察阶段，难以发现非占位性病变。在这种情况下，越来越多的学者致力于超声诊断技术的拓展与创新，超声组织定征就是该方面的重要成果。超声组织定征是从超声回波中提取与组织生理病理状态相关的其他声特征量以及获取的方法，研究超声波进入生物组织后与其相互作用的机理，确定组织的声学参量在回波的形成中的作用和表现形式。

生物医学超声检测不同于工业超声检测，工业超声中目标信号较为明显，能相对简单地从背景信号中提取，而生物医学超声是在复杂的背散射信号中提取特征量并对生物组织进行分析。利用超声回波进行组织定征，就要从声散射信号（主要是背散射信号）中提取组织的声学参量，进而鉴别组织。生物组织中的散射信号提取，需要建立声压、密度、数、速度等物理参数之间的基本的物理数学关系式以及生物组织与超声波相互作用的模型。

9.1　生物组织声学特性

细胞是基本的组织单元，由它组合成各种生物组织。为了便于理解生物组织中超声波的传播规律，可粗略地将生物组织根据其功能分为：上皮组织、肌肉组织、神经组织、结缔组织。随着组织的类型和状态不同，生物组织的超声特性存在差异，其中声阻抗、声速和衰减系数等尤其重要。

生物组织声学参数的测量多采用离体实验的方法。由于制作生物组织标本时的差异较大，导致不同实验者在不同的条件下采用不同的方法所得结果的分散程度很大。且生物组织离体测量时，其条件与在体情况下有显著区别，也会引起测量误差。表 9.1 为部分生物组织的声学参数[1,2]。

表 9.1　部分生物组织的声学参数

生物组织	密度/(g/cm)	声速/(m/s)	声阻抗/(10^6Pa·s/m)
血液	1.055	1570	1.656
大脑	1.038	1540	1.599
小脑	1.030	1470	1.514
脂肪	0.955	1476	1.410

续表

生物组织	密度/(g/cm)	声速/(m/s)	声阻抗/(10^6Pa · s/m)
肌肉	1.074	1568	1.684
肝	1.050	1570	1.648
颅骨	1.658	3860	5.571
脑脊髓	1.000	1522	1.522
眼玻璃体	0.992～1.010		1.483～1.510
乳房		1510	

从表 9.1 可以看到，血液、脑、脂肪、肝、肌肉等的声速大致在 1500m/s 左右，因此在近似的条件下，认为其声速都一样。这是目前各种医学超声诊断仪器检测脏器大小的基础。图 9.1 给出的是不同生物组织的密度和声速分布，从图中可以清晰地看出各组织的声学参数量值范围。

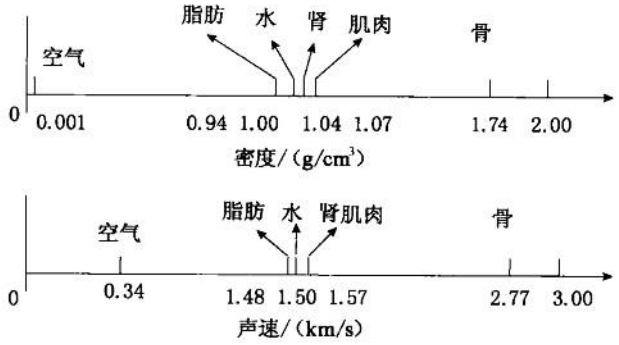


图 9.1　常见组织和材料的密度和声速

介质中超声衰减主要由声束扩散、散射、组织吸收和界面上波的弹性反射等因素产生的。不同的正常生物组织有不同的衰减系数。表 9.2 给出了人体某些组织中的平均衰减系数。超声波在人体组织中的衰减系数是随频率增加而增大，因此对不同部位组织的检测需要用到不同频率的超声波，探测深部组织或较厚的脏器时用较低频率的超声波可以提高超声波的穿透能力，对浅层组织用较高频率可以提高超声波的分辨率。一般，眼科用 10～20MHz，心脏和腹部用 2.0～3.5MHz 的超声波。

表 9.2 人体部分组织的平均衰减系数

人体组织	平均衰减系数/(dB/(cm·MHz))	频率范围/MHz
眼球玻璃体液	0.10	6～30
血液	0.18	1.0
脂肪	0.68	0.8～7.0
延髓(顺纤维)	0.80	1.7～3.4
脑	0.85	0.9～3.4
肝	0.94	0.3～3.4
延髓(横越纤维)	1.20	1.7～3.4
肌肉(顺纤维)	1.30	0.8～4.5
心肌	1.80	0.3～4.5
眼球晶状体	2.00	3.3～15
肌肉(横越纤维)	3.30	0.8～4.5
颅骨	20.00	1.6
肺	41.00	1.0

9.2 生物组织解析法分析

目前普遍采用的生物组织解析模型有:分离散射子模型,非均匀连续模型,分层介质模型及指数衰减模型。

9.2.1 非均匀连续模型[3～5]

某些生物组织的声学参数接近于连续性变化,此时则应用连续性函数来描述组织的声学特性。非均匀连续介质模型假设组织中的起伏量是统计上的连续函数,其相关函数是连续的,声阻抗的变化也是连续的,但这些变化的规律是随机的。这种模型最初是由 Chernov 在 1960 年提出,用于讨论海洋中温度不均匀所引起的声散射问题。1977 年,Gore 和 Chivers 分别将此理论作了些修改,将温度的不均匀性直接换成弹性模量(或声速)和密度的不均匀性,并推导了声波在非均匀软组织中的传播方程。

超声波在非均匀组织中传播,令其密度为 ρ,r 点 t 时刻的声压为 $p(r,t)$,质点振动速度为 v,则

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho_e + \delta\rho = \rho_e + \delta\rho$$

$$p = p_0 + \delta p$$

$$c = c_0 + \delta c \tag{9.2.1}$$

式中，ρ_0、p_0、c_0 分别为平衡时的密度、声压和振动速度；$\delta\rho$，δp，δc 分别为超声波在组织中传播时各参数的扰动；$\delta\rho_e$ 描述的是组织参数的不均匀性。相应的状态方程为

$$k_e\rho_e \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} = \frac{\partial(\delta\rho_e)}{\partial t} + \frac{\partial(\delta p)}{\partial t} + (c \cdot \nabla)\delta\rho_e \tag{9.2.2}$$

式中，k_e 为组织中散射子的弹性系数，且 $k_e\rho_e = \dfrac{\partial p}{\partial \rho}$。

由连续性方程和欧拉方程求得波动方程为

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho_e}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{pc^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}\right) = 0 \tag{9.2.3}$$

对式(9.2.3)整理得

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \nabla(\delta\rho) \nabla p - \frac{2\delta c}{c_0^3} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{9.2.4}$$

式(9.2.4)为非均匀连续散射体中的波动方程。如图 9.2 所示，v_S 为非均匀连续散射体，其中的 $\mathrm{d}v_S$ 可以看做是均匀散射体。假设散射波远小于入射波，则散射体的散射场可以写成

$$u^S(r,t) = \int_v \frac{Q(r', t - |r - r'|/c_0)}{4\pi|r - r'|} \mathrm{d}v_S \tag{9.2.5}$$

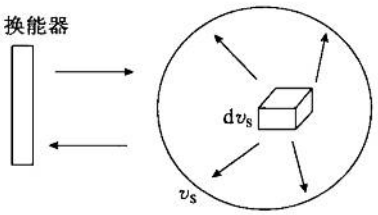


图 9.2　非均匀连续散射体的散射

式中，$Q(r,t)$ 表示的是非均匀介质的散射强度

$$Q(r,t) = \frac{2\delta c}{c_0^3} \cdot \frac{\partial^2 u^I(r,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \nabla(\delta\rho(r)) \nabla u^I(r,t) \tag{9.2.6}$$

其中，$u^I(r, t)$ 为入射声场，式中的第一项为非均匀连续散射体振动速度扰动对散射强度的影响因子，第二项为密度扰动对散射强度的影响因子。超声波的发射和接收为同一换能器，该换能器的发射声场

$$v^{\text{in}}(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{j}\omega\rho_0 V(\omega)\Phi(\omega,r)\exp(\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{9.2.7}$$

式中的 $V(\omega)$ 为换能器表面质点的振动速度；$v(t)$ 作傅里叶变换后的频域表达式

$$V(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}v(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \tag{9.2.8}$$

式(9.2.7)中的 $\Phi(\omega,r)$ 是指速度势

$$\Phi(\omega,r)=\frac{1}{2\pi}\int_{s}\frac{\exp(-\mathrm{j}\omega|r-r'|/c_0)}{|r-r'|}\mathrm{d}s \tag{9.2.9}$$

式中，s 为换能器的表面。

当只考虑非均匀连续散射体的速度扰动时，即 $\delta\rho=0$，可得散射场为

$$v^{\text{S}}(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{v_{\text{S}}}(\mathrm{j}\omega)^3\rho_0\delta c(r')V(\omega)\Phi(\omega,r')\frac{\exp(\mathrm{j}\omega(t-|r-r'|/c_0))}{(2\pi)^2c_0^3|r-r'|}\mathrm{d}v_{\text{S}}\mathrm{d}\omega \tag{9.2.10}$$

由此，换能器所接受到的回波信号为

$$e_{\text{e}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{j}\omega V(\omega)T(\omega)\exp(\mathrm{j}\omega t)\left[\int_{v_{\text{S}}}\frac{(\mathrm{j}\omega)^2\delta c(r')\Phi^2(\omega,r')}{2(\pi c_0^3)}\mathrm{d}v_{\text{S}}\right]\mathrm{d}\omega \tag{9.2.11}$$

式中，$T(\omega)$ 为回波信号接收时频域的声电转化特性。

同理，当只考虑非均匀连续散射体的密度扰动时，即 $\delta c=0$，可得散射场为

$$v^{\text{S}}(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{v_{\text{S}}}\mathrm{j}\omega\rho_0 V(\omega)\nabla[\delta\rho(r')]\cdot\nabla\Phi(\omega,r')\frac{\exp(\mathrm{j}\omega(t-|r-r'|/c_0))}{8\pi^2\rho_0|r-r'|}\mathrm{d}v_{\text{S}}\mathrm{d}\omega \tag{9.2.12}$$

背向散射系数常被用于度量背散射，其定义式如下：

$$\sigma=\frac{r^2}{V_{\text{S}}}\frac{I_{\text{b}}}{I_{\text{i}}} \tag{9.2.13}$$

式中，r 为换能器到散射体的距离；V_{S} 为散射体的体积；I_{b} 为背向散射声波的声强；I_{i} 为入射声波的声强。

由式(9.2.5)计算得到的散射声场结合入射声场计算得到的背散射系数用于实验验证，可以得到图 9.3。其中图 9.3(a)为猪肝的反向散射系数对比图，图 9.3(b)为人肝的反向散射系数对比图，图 9.3(c)为人脾的反向散射系数对比图。

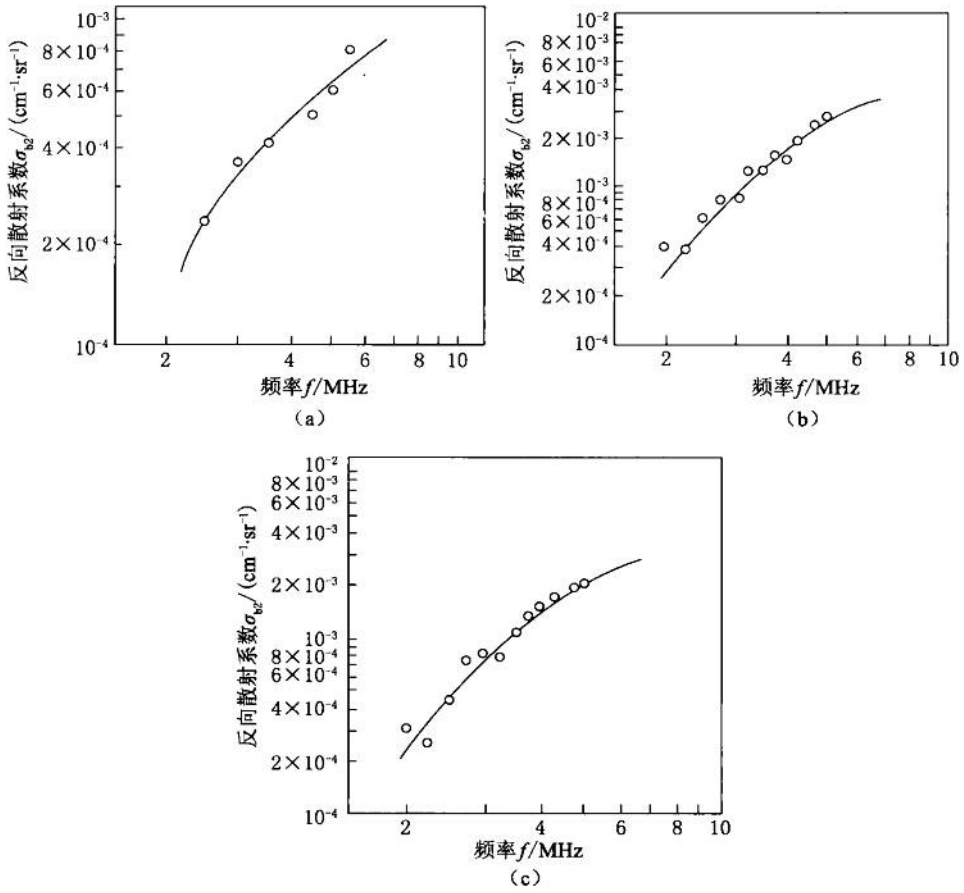


图 9.3　实验数据对比图

实线为计算结果，离散点为实验结果

9.2.2　分离散射子模型[6]

生物组织中分布的胶原蛋白对超声波的散射起主要作用，因而可以将生物组织看做基质中分布着一群与基质声学特性不同的散射粒子，将之称为分离散射子模型。该模型假设均匀组织中分布着随机散射粒子，这些散射子可以有不同的形状、尺度和声学性质，其在空间的分布既可以是有规则的，也可以是随机的。

分离散射子模型假设生物组织中的各散射粒子的声学性质不同、尺寸不同，同时散射子满足泊松分布，如图 9.4 所示。

分离散射子模型首先需要讨论单个散射子的散射波。超声波入射到散射体中时，散射体中的波动方程为

$$\nabla^2 p(r,\omega) + k^2 p(r,\omega) = \nabla \cdot [\gamma_\rho(r) \nabla p(r,\omega)] - k^2 \gamma_k(r) p(r,\omega) \quad (9.2.14)$$

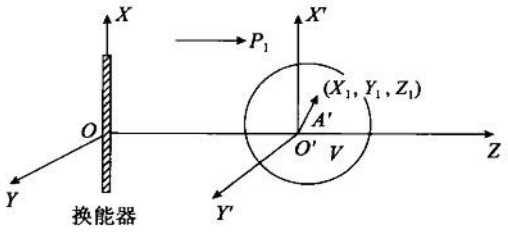


图 9.4 均匀散射体中分布着的散射粒子

式中，k 为波数

$$\gamma_k(r) = \begin{cases} (K_e - K)/K, & \text{散射粒子内部} \\ 0, & \text{散射粒子外部} \end{cases} \tag{9.2.15}$$

$$\gamma_\rho(r) = \begin{cases} (\rho_e - \rho)/\rho, & \text{散射粒子内部} \\ 0, & \text{散射粒子外部} \end{cases} \tag{9.2.16}$$

式中，ρ 为散射体的平均密度；K 为散射体的压缩系数；ρ_e 为散射体中所分布散射粒子的密度；K_e 为对应散射粒子的压缩系数。生物组织中，散射粒子与散射体的声学参数相差不大，则相对压缩系数差 γ_k 和相对密度差 γ_ρ 均远小于 1。

假设沿 z 轴入射超声波声压为

$$P_i(r,\omega) = S(\omega)\exp(\mathrm{j}kz)b(x,y) \tag{9.2.17}$$

式中，$S(\omega)$ 为入射超声波的幅度谱；$b(x,y)$ 超声场的横向分布。在远场区，$b(x,y)$ 值的变化较慢，此时 $P_i(r,\omega)$ 满足奇次波动方程。采用波恩近似，将式(9.2.17)代入式(9.2.14)可解出换能器接收到的回波声压 $P_w(r,\omega)$。当散射粒子处于远场区时，再采用远场近似求解可以得换能器接收到的回波声压为

$$P_{\mathrm{bsw}}(R) = \frac{k^2 S(\omega)}{4\pi R}\exp(\mathrm{j}kR)\int_v [\gamma_k(r') - \gamma_\rho(r')]\exp(2\mathrm{j}kz')\mathrm{d}v' \tag{9.2.18}$$

由式(9.2.15)和式(9.2.16)可知，当积分处于散射粒子外部时整个积分结果为 0，所以只需考虑散射粒子内部的积分。

若将散射粒子看做是球形颗粒，则式(9.2.18)可以简化为

$$P_{\mathrm{bsw}}(R) = \frac{kS(\omega)}{2R}\exp(2\mathrm{j}kR)b(x_0,y_0)Qa^2\mathrm{J}_1(2ka) \tag{9.2.19}$$

式中，a 为球形颗粒的半径；J_1 为一阶贝塞尔函数；$Q=\gamma_k-\gamma_\rho$，反映了声阻抗的差异。在前面提到的假设条件下，采用一级多次散射近似时

$$P_{\mathrm{bsw}}(R) = \sum_{i=1}^{N} \frac{kS(\omega)}{2(R+z_i)}\exp(2\mathrm{j}k(R+z_i))\exp(-2\alpha(R+z_i))b(x_i,y_i)Q_i a_i{}^2\mathrm{J}_1(2ka_i) \tag{9.2.20}$$

式中，a_i 指第 i 个散射粒子的半径；z_i 指第 i 个散射粒子的位置。

将式(9.2.20)用于计算背向散射系数并与实验结果进行对比。试验用的材料以琼脂为基质，其中分布着铁粉作为散射粒子。最终计算得到的数据与实验数据的对比结果如图 9.5 所示。

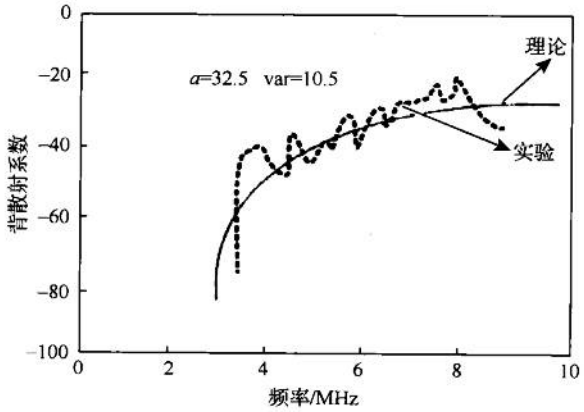


图 9.5　背散射系数对比图

9.2.3　分层介质模型[2]

人体组织从外向内可分为表皮、真皮、皮下组织、脂肪、肌肉以及深处的内脏器官和骨组织等层次，不同层次的声学特性存在差异，这种差异可以用分层介质模型来模拟。白净等在进行声阻抗图的重建时，采用了分层介质模型，且不计吸收衰减和高阶回波；随后，又建立了各层衰减系数不同的分层介质超声传播模型，形成了估计各层衰减系数与各界面反射系数的有效方法，并用回波重建法分离了软组织的超声反射波和散射波。

如图 9.6 所示，用 $X_0, X_1, \cdots, X_N$ 来表示 N 层介质模型中各层间交界面的位置，其中第 i 层的声阻抗为 Z_{ci}，密度为 ρ_i，声速为 c_i，衰减系数为 α_i，散射粒子分布为 S_i。该模型的每一层都代表一种生物组织，超声波在这些生物层状组织中传播时，生物组织对超声波的作用可以用大界面的反射、小粒子的散射以及吸收衰减作用的总和来表示。用冲激响应来描述分层介质

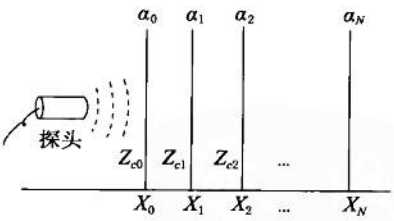


图 9.6　分层介质模型示意图

$$h_m(t) = [h_f(t) + h_s(t)] * h_a(t) \tag{9.2.21}$$

式中，$h_f(t)$为大界面冲激响应；$h_s(t)$为小粒子的冲激响应；$h_a(t)$为衰减因子。考虑到超声波的衰减是作用到大界面的反射和小粒子的散射上的，所以用卷积来建立相互之间的关系。为了简化计算，忽略分层介质界面处的多次反射，对于一个

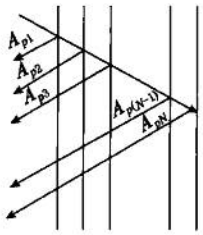


图 9.7 超声波在层状介质中的传播

N 层介质来说，超声波在界面处的反射如图 9.7所示。图中的 $A_{p1}, A_{p2}, A_{p3}, \cdots, A_{pN}$ 分别为各层的声压反射系数

$$A_{pi} = \frac{Z_{ci} - Z_{c(i-1)}}{Z_{ci} + Z_{c(i-1)}} \tag{9.2.22}$$

则 N 层介质的冲激响应为

$$h_f(t) = \sum_{i=1}^{N} A_{pi} \prod_{k=1}^{i-1} (1 - A_{pk}) \delta(t - t_i) \tag{9.2.23}$$

式中，t_i 为各界面的回波时间。考虑吸收衰减时，相应的大界面冲击响应为

$$h_f(t) = \sum_{i=1}^{N} A_{pi} \prod_{k=1}^{i-1} (1 - A_{pk}) \delta(t - t_i) \exp\left(-2 \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k \Delta x_k\right) \tag{9.2.24}$$

式中，α_k 为第 k 层的衰减系数；x_k 为第 k 个界面的坐标。

9.3 骨骼的数值分析

生物软组织一般适用上述解析法模型进行计算分析，而骨骼多使用数值法进行计算分析。现用有限元法计算超声波在骨骼（牙齿）中的传播[7]。首先用 X 射线 CT 扫描牙齿，得到牙齿的三维图形。X 射线 CT 扫描的步长可达 0.3mm，图 9.8 为扫描不同牙齿后得到的三维图。牙齿中 10MHz 的超声波的波长为 0.3mm 左右，理论上在一个波长的范围内需要有 4～5 个节点才能较好地描述超声波在牙齿中的传播。这种情况下模型中节点数量必然很大，为了尽量减少计算量，将相邻节点间的距离设置在 0.12mm 附近，该数值小于奈奎斯特采样频率的最大值。由于牙齿的几何形状非常复杂，模型的划分采用四面体元。PATRAN 被用于牙齿有限元模拟的网格划分。在划分网格的过程中只考虑牙釉质和齿质的不同，而忽略牙髓，这是因为牙髓对超声波传播过程的影响较小。图 9.9 为各种牙齿的网格划分。



图 9.8 几种牙齿的三维图形

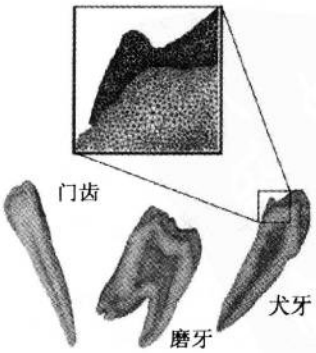


图 9.9 牙齿的网格划分

鉴于牙齿的结构特点，牙齿根部的牙颈区域表面节点边界条件可以设置为 $u_1=0, u_2=0, u_3=0$。在实际检测过程中，是在颊面的中部垂直于表面加载脉冲载荷，其最大值约为 $2\times10^{-2}\mathrm{N/m^2}$，频率为 10MHz。采用 ABAQUS/Standard 模块模拟牙齿中的超声波传播。在相同条件下，用有限元法对磨牙检测信号进行计算，并与实际检测结果进行对比，得到图 9.10。其中图 9.10(a)和图 9.10(b)是高频(1～15MHz)时的信号对比图。图 9.10(a)为 FEM 法计算得到的图像，图 9.10(b)实际检测信号；图 9.10(c)和图 9.10(d)为低频(100～600KHz)时的信号对比图，图 9.10(c)为 FEM 法计算得到的图像，图 9.10(d)为实际检测信号。

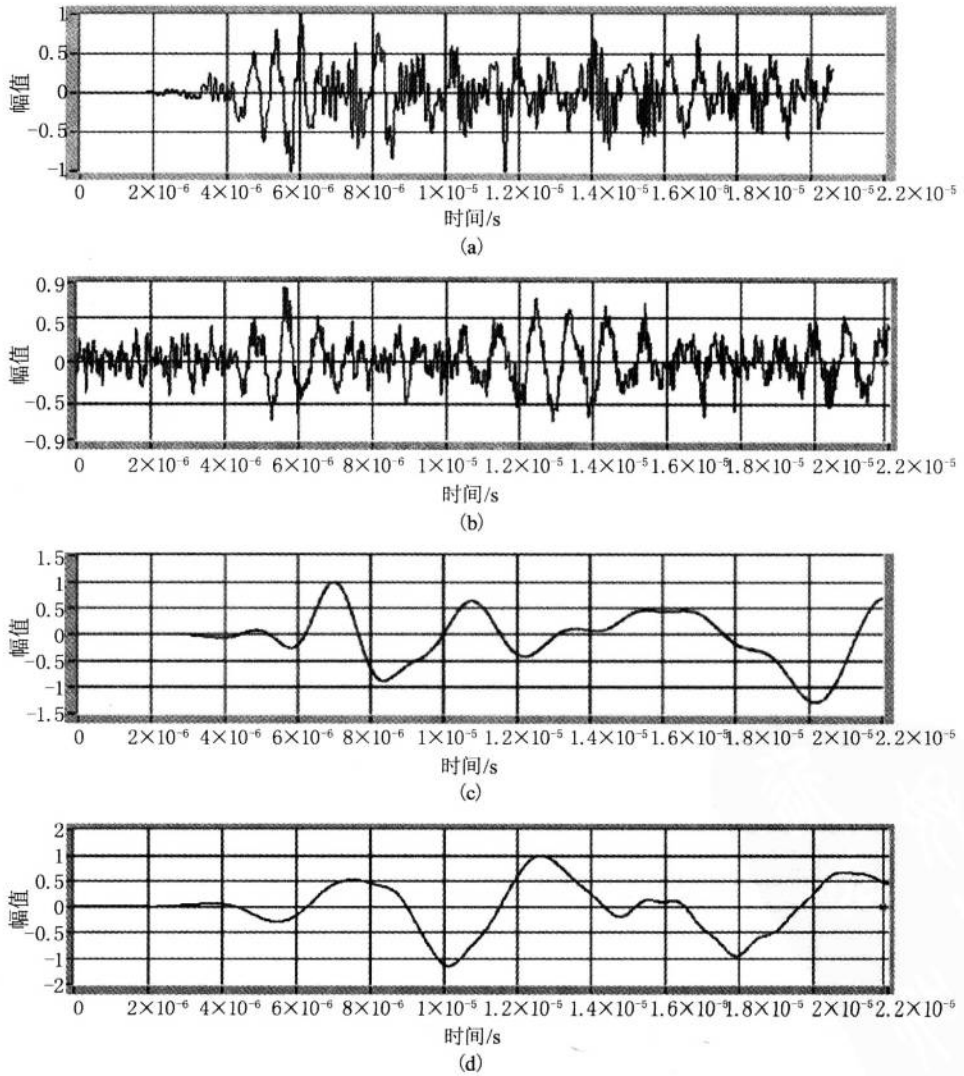


图 9.10　FEM 结果与实验结果的对比

9.4 多普勒法

在声源和被检物体之间存在着相对运动的情况时，所检测到的声信号频率会偏离声源信号频率，这种效应称为多普勒效应[2,8~10]。多普勒效应是 1842 年由多普勒首次发现的。医学超声中，多普勒法(Doppler methods)多用来检测人体内流体的运动速度，例如循环系统中的血液流动速度和呼吸系统中的空气流动速度。

假设被检物体以速度 v 沿着水平方向向右移动，同时存在固有频率为 f_1 的声源在发射平面波(见图 9.11)。图中的 θ_1(θ_R)表示的是发射声波(反射声波)波矢与被检物体运动速度 v 的夹角，f_R 为接收信号的频率。若介质中声波的实际速度为 c，则相对于被检物体的入射声速为

$$c_I = c - v\cos\theta_I \tag{9.4.1}$$

入射声波的波长不变，因此利用公式 $\lambda f = c$ 可以推导得出相对于被检物体的入射声波频率为

$$f_{Ia} = f_I(1 - v\cos\theta_I/c) \tag{9.4.2}$$

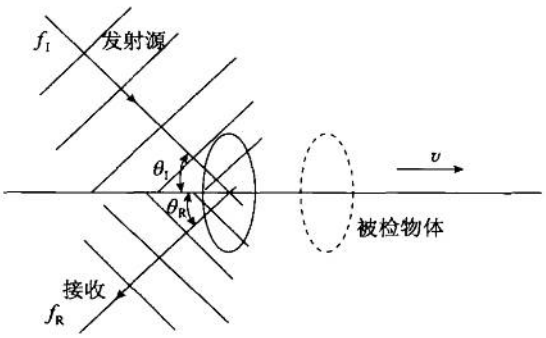


图 9.11 运动物体与声波的相互作用

在声波反射过程中，式(9.4.2)中的相对频率 f_{Ia} 可以看做是被检物体发射声波的频率。由于被检物体处于运动状态，则其发生声波的相对波速为

$$c_R = c + v\cos\theta_I \tag{9.4.3}$$

将该式用于计算发射声波的频率为

$$\begin{aligned} f_R &= f_{Ia}/(1 + v\cos\theta_R/c) \\ &= f_1 \frac{1 - v\cos\theta_I/c}{1 + v\cos\theta_R/c} \end{aligned} \tag{9.4.4}$$

由式(9.4.4)可知多普勒频移 f_D 为

$$f_D = f_R - f_I = f_I\left(\frac{2v\cos\theta_I/c}{1+v\cos\theta_R/c}\right) \tag{9.4.5}$$

利用式(9.4.5)则可以在已知检测参数的条件下反推被检物体的速度。而对于振动物体也可以使用多普勒法对其振动位置、速度进行计算。

假设对静止物体发射一角频率为 ω_0 的声波，则接收到的回波信号为

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) \tag{9.4.6}$$

而当被检物体以角频率 ω_a 振动时，则回波信号相对声源也会发生频移，其瞬时角频率为

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega_m\cos(\omega_a t) \tag{9.4.7}$$

式中，$\Delta\omega_m$ 为最大多普勒频移，其表达式为

$$\Delta\omega_m = 2v_m\omega_0\cos\theta/c \tag{9.4.8}$$

其中，v_m 为被检物体的最大运动速度；θ 为声波波矢与振动方向的夹角；c 为波速。假设波矢方向与振动方向一致，则 $\theta=0$，则回波信号为

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t + \Delta\omega_m\sin(\omega_a t)/\omega_a) \tag{9.4.9}$$

利用贝塞尔函数，式(9.4.9)可以表示为

$$u(t) = A\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_0 t + n\omega_a t) \tag{9.4.10}$$

式中，$J_n(\beta)$为第一类 n 阶贝塞尔函数；β 为调制参数

$$\beta = \Delta\omega_m/\omega_a \tag{9.4.11}$$

因此，用 β 表示被检物体的最大振动速度 v_m 及其振幅 A_m 为

$$\begin{aligned} v_m &= c\beta\omega_a/(2\omega_0) \\ A_m &= c\beta/(2\omega_0) \end{aligned} \tag{9.4.12}$$

由式(9.4.12)可以得到组织的振动幅度和速度与 β 成正比。在声弹性图中，组织运动幅度、速度或 β 可作为位置的参数来测量、成像。

由于多普勒法可以计算被检物体的运动，所以可以将之应用于软组织的弹性成像。对一软组织进行加载和卸载，在这个过程中做光学相干断层扫描(optical coherence tomography，OCT)分别得到图 9.12(a)、图 9.12(e)，其中箭头方向表示载荷方向。同时用多普勒法对该组织进行弹性成像可得图 9.12(b)～图 9.12(d)和图 9.12(f)～图 9.12(g)，左列的载荷方向与图 9.12(a)相同，右列的载荷方向与图 9.12(b)相同。图 9.12(b)与图 9.12(f)为速度分布图，图 9.12(c)与图 9.12(g)为瞬时位移分布图，图 9.12(d)与图 9.12(h)为应变率图像。该声弹性图中的参数可以用于确定弹性模量变化组织的区域。

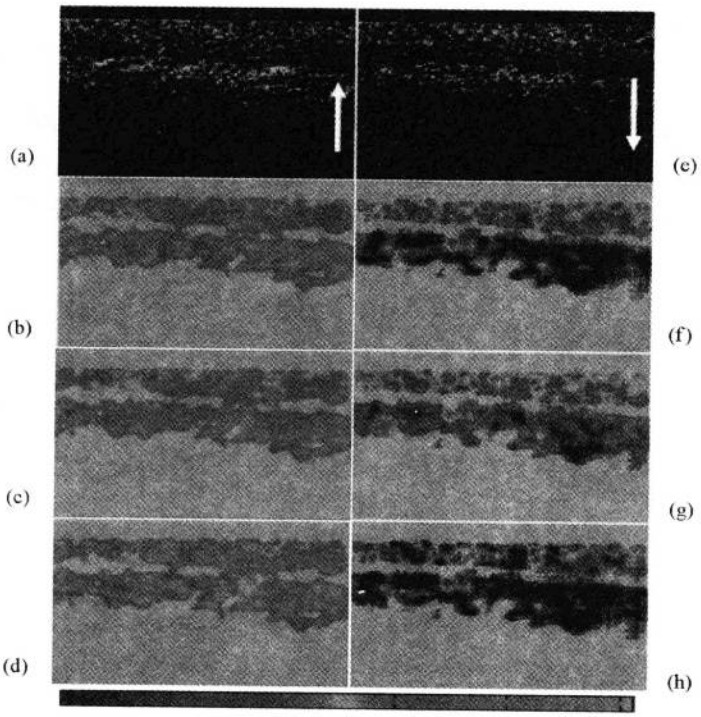


图 9.12 软组织声弹性图

参 考 文 献

[1] 周永昌，郭万学．超声医学[M]．北京：科学技术文献出版社，2004.

[2] 白净．医学超声成像机理[M]．北京：清华大学出版社，1998.

[3] Ueda M, Ichikawa H. Analysis of an echo signal reflected from a weakly scattering volume by a discrete model of the medium[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1981, 70(6):1768-1775.

[4] 他得安，陈启敏．非均匀软组织声散射的理论模型[J]．陕西师范大学学报(自然科学版)，1999,27(1):54-57.

[5] 陆宣明，应崇福，周静华．生物组织超声散射的一种改进模型[J]．声学学报(中文版)，1989,14(5):346-356.

[6] 王蜀楚，张海澜，应崇福．生物软组织的一种随机分立模型及其超声背散射系数[J]．声学学报，1995,20(1):11-17.

[7] Sun X Q, Witzel E A, Bian H X, et al. 3-D finite element simulation for ultrasonic propagation in tooth[J]. Journal of Dentistry, 2008, 36:546-553.

[8] 应崇福. 超声学[M]. 北京:科学出版社,1993.

[9] 李仰梅,甄斌,万明习. 应用超声多普勒对软组织弹性成像的研究[J]. 应用力学学报,1999,16(3):7-14.

[10] Wang R K, Ma Z H, Kirkpatrick S J. Tissue Doppler optical coherence elastography for real time strain rate and strain mapping of soft tissue[J]. Applied Physics Letters, 2006, 89(14).

第 10 章　超声成像算法

基于脉冲回波的超声成像技术按照回波显示方式可以分为 A 型、B 型、C 型、M 型和 F 型。其中工业超声检测常用 A 型、B 型、C 型，而且由于成像速度及精度的要求，其成像算法的发展滞后于医学超声。新的高效率成像算法和方法将会带动超声检测与诊断技术的发展。目前超声成像算法研究热点包括超声弹性成像、傅里叶成像、合成孔径成像和超声三维成像等。

10.1　弹性成像算法

超声弹性成像反映生物组织弹性特征，利用特制声源激励组织，估计其动态位移，由应力应变关系计算出相应的弹性系数分布并加以显示，可以观察组织的弹性及病态特征[1~4]。超声弹性成像算法主要分为三步：①利用时域互相关技术（信号压缩和拉伸）估计位移；②利用位移梯度导数得到应变；③利用反问题求解，由应变分布反演出组织弹性系数分布。其中，由应变分布反演出组织弹性系数分布的反问题求解是弹性成像算法的关键，目前常用的弹性成像反问题求解方法有三种：

第一种方法是局部直接法，该方法直接由每个计算点的平衡方程计算弹性常数。首先假设所有计算节点的位移场可以测量，将应变施加到组织模型，将应力矢量表示为弹性常数的函数，然后通过将应力矢量带入平衡方程来求解。该方法的缺点是当位移场测量出现噪声时，无法进行建模计算，而实际测量中的噪声往往是无法避免的。

第二种方法是将反问题转换为最优化问题，通过迭代法得到最优化解。每一步迭代的正问题都用有限元法求解。首先选取一初始材料弹性常数分布，通过正问题求解得到位移场分布，将计算的位移场与测量的位移场进行对比，反复迭代，直到计算位移场与测量位移场的均方差最小时，所选的材料弹性常数分布即为最优解。该方法的缺点是计算时间长，因此无法用于大规模的成像。

第三种方法是上述两者方法的结合，即基于 FEM 的直接法，直接利用有限元法求解材料弹性常数分布。利用有限元在单元上建立平衡方程的弱形式，从而避免了直接在每个计算节点上求解平衡方程。

现用基于 FEM 的直接法进行超声弹性成像的计算。考虑如图 10.1 所示组织区域，线弹性固体力学中平衡方程、连续性方程和兼容性方程分别如下：

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \tag{10.1.1}$$

式中，σ 为应力矢量；b 为体力；ε 为应变；δ_{ij} 为克罗内克函数；λ 和 μ 为拉梅常数。满足边界条件：

位移边界条件：$u_i(x)=\hat{u}_i(x), x\in\partial\Omega_u$

应力边界条件：$\sigma(x)\cdot n=\hat{\tau}(x), x\in\partial\Omega_t$ (10.1.2)

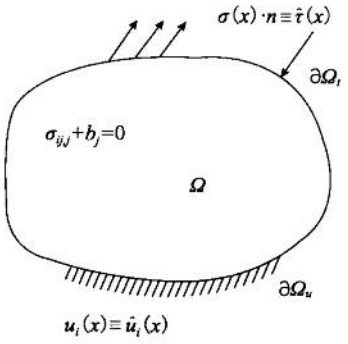


图 10.1　组织区域 Ω 示意图

若将区域 Ω 用类似有限元方式划分为一组单元，第 e 个单元的位移场 $u(x)=[N(x)][u^e]$，其中 $[N(x)]$ 为形状函数矩阵，$[u^e]$ 为单元节点位移矢量。根据兼容性方程，应变张量为 $\varepsilon(x)=[B(x)][u^e]$，其中 $[B(x)]$ 为兼容矩阵，应变张量 $\varepsilon=[\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},2\varepsilon_{23},2\varepsilon_{31},2\varepsilon_{12}]^{\mathrm{T}}$。泊松比为 0.495。这样唯一的未知量为材料弹性常数 E^e，应力张量可以写为

$$\sigma(x) = E^e[\overline{D}]\varepsilon(x) = E^e[\overline{D}][B(x)][u^e] \tag{10.1.3}$$

式中，应力张量为 $\sigma=[\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{23},\sigma_{31},\sigma_{12}]^{\mathrm{T}}$；$[\overline{D}]$ 为参考本构矩阵，其表达式如下：

$$[\overline{D}] = \frac{(1-v)}{(1+v)(1-v)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{1-v} & 1 & \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix} \tag{10.1.4}$$

依照有限元标准步骤，单元刚度矩阵为

$$[K^e(E^e)] = E^e\int_{\Omega^e}[B(x)]^{\mathrm{T}}[\overline{D}][B(x)]\mathrm{d}\Omega^e = E^e[\overline{K}^e] \tag{10.1.5}$$

式中，$[\overline{K}^e]$表示单元参考刚度矩阵。对于测量单元节点位移$[u^e]$，单元内节点应力矢量$[f^e]$可以表示为

$$[f^e] = [K^e(E^e)][u^e] = E^e[\overline{f}^e] \tag{10.1.6}$$

式中，$[\overline{f}^e]$表示单元参考内应力矢量。如果测量场为应力场$[\varepsilon]$，则单元内节点应力矢量可以表示为

$$[f^e] = [K^e(E^e)][u^e] = E^e\int_{\Omega^e}[B(x)]^{\mathrm{T}}[\overline{D}][\varepsilon(x)]\mathrm{d}\Omega^e = E^e[\overline{f}^e] \tag{10.1.7}$$

在得到单元内节点应力矢量$[f^e]$的表达式之后，可以按照常规步骤组装系统的平衡方程。此时需要引入边界条件。在固体力学的正问题中，位移边界条件和外力边界条件不同。在弹性成像反问题中，两种条件需要更为严格的对待。如果位移场是完全可测的，即所有节点位移已知，则外力也已知，对任意 DOF，外力矢量记为$[p]$。若给定 DOF 的外力未知，则相应的平衡方程要从系统方程组中移出，外力未知的节点需要从目标函数中移出，否则系统解方程时会增加未知量。

当从系统中移出未知节点后，系统的 DOF 记为 $i(i=1,2,\cdots,n_{\mathrm{d}})$，其中 n_{d} 表示系统 DOF 数。对于第 e 个网格单元，定义一个 $n_{\mathrm{d}}\times n_{\mathrm{d}}^{\mathrm{E}}$ 的组装矩阵$[H^e]$，当这个网格单元的第 j 个 DOF 自由度与系统第 i 个系统 DOF 相匹配时，矩阵$[H^e]$的元素为 1，即 $H_{ij}^e=1(i=1,2,\cdots,n_{\mathrm{d}};j=1,2,\cdots,n_{\mathrm{d}}^{\mathrm{E}})$，其他情况 $H_{ij}^e=0$。对每一个参数矢量，都有 n_{E} 个元素，每个元素标记为 $i(i=1,2,\cdots,n_{\mathrm{E}})$，若对第 i 个元素定义一个 n_{E} 维矢量$[G^{e_i}]$，其中 $G^{e_i}=\delta_{ij}$。将所有单元的材料弹性常数矩阵 E^e 组装到一个刚度矩阵$[E]$，得到系统的内应力矢量

$$[f] = \Big\{\sum_e [H^e][\overline{f}^e][G^e]^{\mathrm{T}}\Big\}[E] = [\overline{F}][E] \tag{10.1.8}$$

式中，$n_{\mathrm{d}}\times n_{\mathrm{E}}$ 矩阵$[\overline{F}]$为系统的参考内应力矩阵，可以直接由组装矢量$[\overline{f}^e]$得到。系统节点平衡方程为

$$[f] = [\overline{F}][E] = [p] \tag{10.1.9}$$

由于$[\overline{F}]$的尺寸为 $n_{\mathrm{d}}\times n_{\mathrm{E}}$，这表示有 n_{E} 个未知量和 n_{d} 个方程，一般来说 $n_{\mathrm{d}}\neq n_{\mathrm{E}}$。当 $n_{\mathrm{d}}<n_{\mathrm{E}}$ 时，即未知量数量大于方程数量，则此时方程组的解不唯一，需要重新组装刚度矩阵，减小未知量数量，常用的方法是将八节点四边形单元转换为三节点三角形单元。当 $n_{\mathrm{d}}=n_{\mathrm{E}}$ 时，若$[\overline{F}]$为非奇异矩阵，则材料弹性常数矢量$[E]$可以直接得到

$$[E] = [\overline{F}]^{-1}[p] \tag{10.1.10}$$

此时需要验证所得结果是否符合物理事实，如弹性常数必须大于零。当 $n_{\mathrm{d}}>n_{\mathrm{E}}$ 时，即方程数大于未知量数，不能保证方程组的唯一解，此时需要将方程(10.1.9)

转换为最优化问题。首先定义节点残余应力矢量$[R]$：

$$[R]=[f]-[p]=[\overline{F}][E]-[p] \tag{10.1.11}$$

则最优化的目标是求$|R|^2=R_iR_i$的最小值，满足条件为

$$\left[\frac{\partial|R|^2}{\partial E}\right]=2\left[\frac{\partial R}{\partial E}\right]^{\mathrm{T}}\cdot[R]=0 \tag{10.1.12}$$

将方程(10.1.11)带入方程(10.1.12)，得到

$$[\overline{F}]^{\mathrm{T}}[\overline{F}][E]-[\overline{F}]^{\mathrm{T}}[p]=0 \tag{10.1.13}$$

如果矩阵$[\overline{F}]^{\mathrm{T}}[\overline{F}]$为奇异矩阵，则解不唯一，同前面一样，需要修正有限元模型，即将八节点四边形单元转换为三节点三角形单元。如果$[\overline{F}]^{\mathrm{T}}[\overline{F}]$为非奇异矩阵，则弹性常数矢量$[E]$可以表示为

$$[E]=\{[\overline{F}]^{\mathrm{T}}[\overline{F}]\}^{-1}[\overline{F}]^{\mathrm{T}}[p] \tag{10.1.14}$$

基于 FEM 的直接法可用于图 10.2 所示的弹性软组织二维模型计算，该模型面积为 100mm×100mm，划分为 25 个方形区域，其中三个阴影方形区域表示硬质夹渣，其弹性模量为 $E=0.2$MPa，周围为均质软组织，弹性模量为 $E=0.02$MPa，泊松比为 0.495。每个方形区域都划分为 64 个三角形单元，这样整个区域有 800 个三节点三角形单元，441 个节点。模型左下角固定，右下角垂直位移为零，在上表面施加 1.0kPa 的压力载荷。

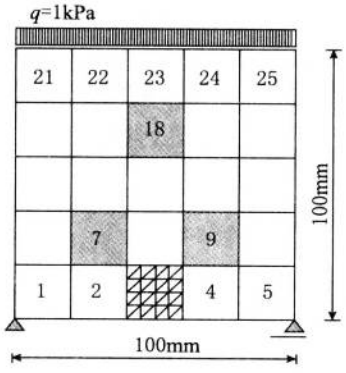


图 10.2　组织模型的几何结构与边界条件

首先利用 ABAQUS 软件进行正问题求解，得到所需的“测量”节点位移，并以此作为参考精确解$[u^{\mathrm{exact}}]$和$[\varepsilon^{\mathrm{exact}}]$。计算得到平面方向主应变如图 10.3 所示，法线方向的主应变如图 10.4 所示。根据应变图，无法识别三个硬质夹渣，因此必须求解反问题，得到弹性分布。

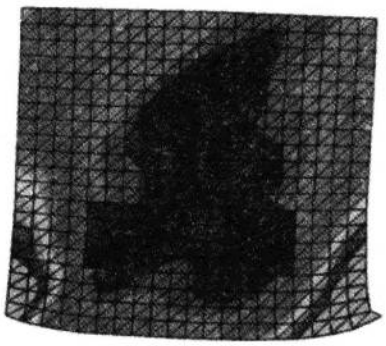


图 10.3 平面主应变

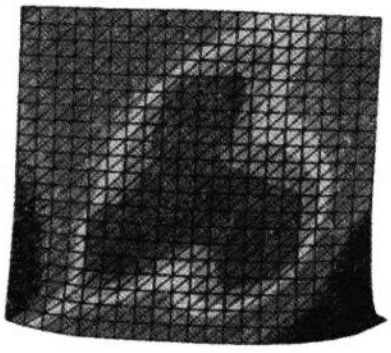
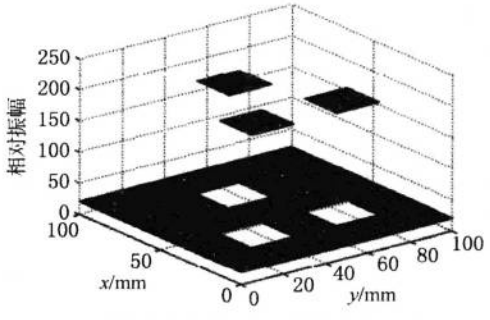


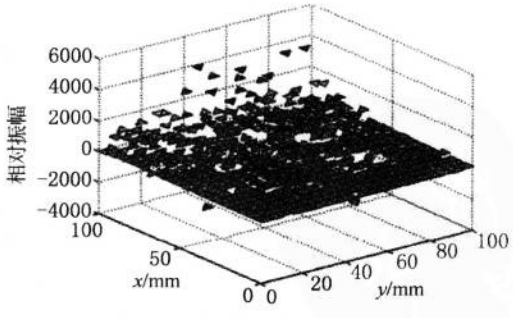
图 10.4 法向主应变

在反问题的求解中，需要求解 800 个未知材料常数量，879 个节点残应力分量。若以测量位移场$[u]$作为输入，可以根据式(10.1.6)计算弹性常数分布。若以$[u^{\text{exact}}]$作为输入，此时满足 $\det([\bar{F}]^{\mathrm{T}}[\bar{F}])>0$，直接由式(10.1.14)计算材料弹性常数的优化解，计算结果如图 10.5(a)所示，可以看到，图像可以明显区分三个硬质夹渣区域。

可以利用扰动信号研究基于 FEM 的直接法的可靠性，方法是对测量位移场$[u]$添加一个噪声位移场 u_i。计算结果显示，若设测量位移场的相对误差 $|u_i^{\text{input}}/u_i^{\text{exact}}-1|$ 为 10%，则计算得到的弹性常数优化解的相对误差可达 96%，所以即使较小的测量误差都会导致计算结果的较大误差。图 10.5(b)为将 1%的噪声信号添加到 10%的参考位移后，计算得到的弹性常数分布图，可以看到，三个硬质夹渣区域几乎无法分辨。



(a) 原始位移场输入得到弹性常数分布



(b) 添加1%噪声的位移场得到弹性常数分布

图 10.5 位移场弹性常数分布

10.2　傅里叶成像算法

傅里叶成像是将接收信号用不同阵列波进行加权处理，经过插值后得到空间频谱，最后通过反傅里叶变换得到超声图像[5~7]。仅需要反射一次就能重建一帧图像，该方法可以得到很高的图像帧率，因此也称为高帧率(high frame rate, HFR)成像算法，同时能够简化成像硬件系统。

为了能够得到更高的成像质量，可以对 HFR 算法做适当的修正，如合理选择少数不同参数的阵列波作为发射信号，然后利用平均方法将各信号频谱合成为图形频谱；为了能够扩充 HFR 算法的使用范围，可以先重建某一频率下的图像，然后用发射场修正结果，从而使得 HFR 可以用于平面波、柱面波和球面波等多种波形。

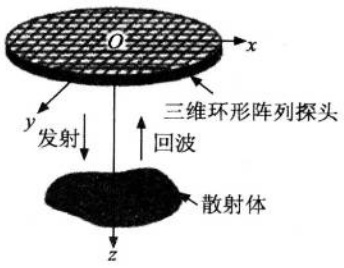


图 10.6　三维成像系统示意图

现对图 10.6 所示的三维成像系统进行傅里叶成像基本算法的应用。在成像系统中，由相同的探头发射和接收有限衍射声束，探头发射信号产生的声场分布可以表示为

$$p(x,y,z;k) = A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x^{\mathrm{e}}x+\mathrm{i}k_y^{\mathrm{e}}y+\mathrm{i}k_z^{\mathrm{e}}z} \tag{10.2.1}$$

式中，$p(x,y,z;k)$表示在位置(x,y,z)处的声压；k 表示波矢；上标 e 表示发射。$A(k)$为激励信号的频谱，波矢分量与 k 之间的关系为

$$k_z^{\mathrm{t}} = \sqrt{k^2-(k_x^{\mathrm{t}})^2-(k_y^{\mathrm{t}})^2} \tag{10.2.2}$$

式中，上标 t 表示传播。如果在 $z=z'$平面存在散射体，则散射体上的声压为

$$s(x,y,z_i;k) = f(x,y,z_i)p(x,y,z_i;k) \tag{10.2.3}$$

式中，$f(x,y,z_i)$为散射体反射系数函数。利用傅里叶变换，可以得到方程(10.2.3)的角谱形式：

$$S(k_x,k_y,k;z_i) = \int_{x,y} s(x,y,z_i;k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x+\mathrm{i}k_y y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{x,y} f(x,y,z_i)A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_x x+\mathrm{i}k'_y y+\mathrm{i}k'_z z_i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x+\mathrm{i}k_y y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10.2.4}$$

由于散射体的反射，由式(10.2.3)和式(10.2.4)给出的反射回波传播至探头表面。基于角谱，很容易得到位于 $z=0$ 平面的探头表面接收信号的角谱形式

$$R(k_x,k_y,k;z_i) = T(k)S(x,y,z_i;k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}} \tag{10.2.5}$$

式中，$T(k)$表示探头频谱响应，假设

$$k_z = \sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2} \tag{10.2.6}$$

利用式(10.2.5)和式(10.2.4)，可以将接收信号重写为

$$R(k_x,k_y,k;z_i) = \int_{x,y} f(x,y,z_i)A(k)T(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_x x+\mathrm{i}k'_y y+\mathrm{i}k'_z z_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10.2.7}$$

式中

$$k'_x = k_x^{\mathrm{t}} + k_x, \quad k'_y = k_y^{\mathrm{t}} + k_y, \quad k'_z = k_z^{\mathrm{t}} + k_z \tag{10.2.8}$$

式(10.2.7)表示探头接收到的信号来自于 $z=z'$ 平面的散射体，则接收信号可以表示为所有反射平面的回波信号的叠加：

$$\begin{aligned} R'(k_x,k_y,k) &= \int_z R(k_x,k_y,k;z)\mathrm{d}z \\ &= \int_{x,y,z} f(x,y,z_i)A(k)T(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_x x+\mathrm{i}k'_y y+\mathrm{i}k'_z z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{10.2.9}$$

假设

$$F_{\mathrm{BL}}(k'_x,k'_y,k'_z) = R'(k_x,k_y,k) \tag{10.2.10}$$

式中，BL 表示有限带宽。对于下面的条件

$$k'_x = 0, \quad k'_y = 0, \quad k'_z = k \tag{10.2.11}$$

可以得到透射信号为

$$p(x,y,z;k) = A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} \tag{10.2.12}$$

并且有

$$k'_x = k_x, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z \tag{10.2.13}$$

对于频谱 $F_{\mathrm{BL}}(k'_x,k'_y,k'_z)$，被测物体可以通过反傅里叶变换得到

$$f_{\mathrm{BL}}(x,y,z) = F^{-1}(F_{\mathrm{BL}}(k'_x,k'_y,k'_z)) \tag{10.2.14}$$

式中，$F^{-1}()$表示反傅里叶变换，$f_{\mathrm{BL}}(x,y,z)$与 $f(x,y,z)$的关系为

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{BL}}(x,y,z) &= \int_{x,y,z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z f(x,y,z)\int_{k_x,k_y,k_z}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z A(k)T(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_x(x'-x)+\mathrm{i}k'_y(y'-y)+\mathrm{i}k'_z(z'-z)} \\ &= \int_{x,y,z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z f(x,y,z)p(x'-x,y'-y,z'-z) \\ &= f(x,y,z) * p(x,y,z) \end{aligned} \tag{10.2.15}$$

其中，函数 $p(x,y,z)$定义为

$$\left.\begin{aligned} p(x,y,z) &= F^{-1}(P(k'_x,k'_y,k'_z)) \\ P(k'_x,k'_y,k'_z) &= [A(k)T(k)]_{k'_x,k'_y,k'_z} \end{aligned}\right\} \tag{10.2.16}$$

从方程(10.2.15)和方程(10.2.16)可以看到，如果平面尺寸无限大，超声图像可以由反射系数和函数 $p(x,y,z)$ 的卷积得到，所以 $p(x,y,z)$ 是图像系统的点源延伸函数(point spread function，PSF)，由探头的激励信号和频谱响应决定。当 k 为无限大时，$T(k)A(k)=1$，$p(x,y,z)$ 转变为冲击函数。一般来说，$T(k)$ 和 $A(k)$ 都是有限带宽，则 $p(x,y,z)$ 是三维空间的一个脉冲，因此 $f(x,y,z)$ 可以表示被测物体的有用信息。

下面将傅里叶成像算法应用到组织模拟试块的超声成像，并和传统传统延迟叠加技术进行了比较。探头为一维线阵，晶片数为 128，频率为 3.5MHz，晶片间距为 0.32mm，孔径为 40.96mm，晶片宽度为 8.6mm。晶片间距约为波长的 3～4 倍。

在模拟中用到了两个试块：试块 1 是 ATS539 组织模拟试块，如图 10.7 所示，该试块中有 40 条金属线，每条金属线表示一个散射体，这里假设所有散射体的反射系数相同；试块 2 是由 18 个点散射体构成的试块，点散射体排列成 3 条线，每条线 6 个点散射体，间距为 20mm。第一条线垂直于探头表面，另外两条线分别与第一条线成 15°和 30°角。探头中心与第一条线重合。

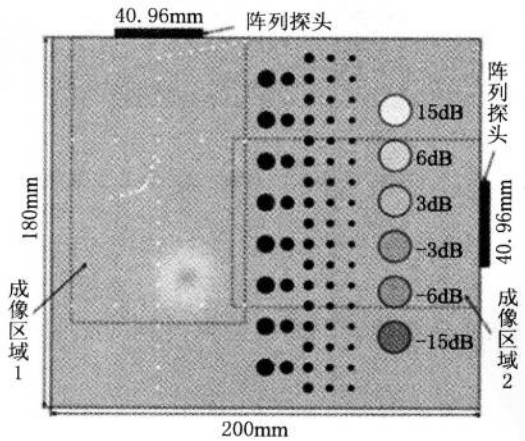
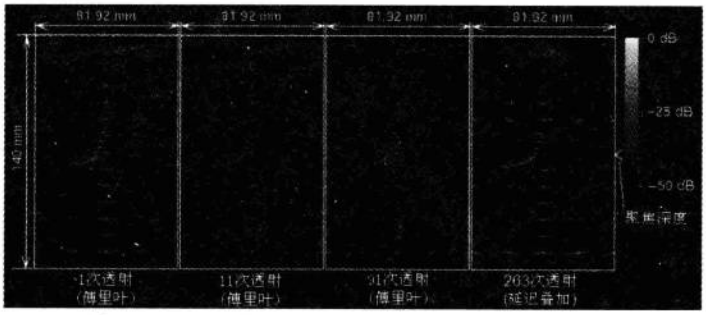


图 10.7　ATS539 组织模拟试块

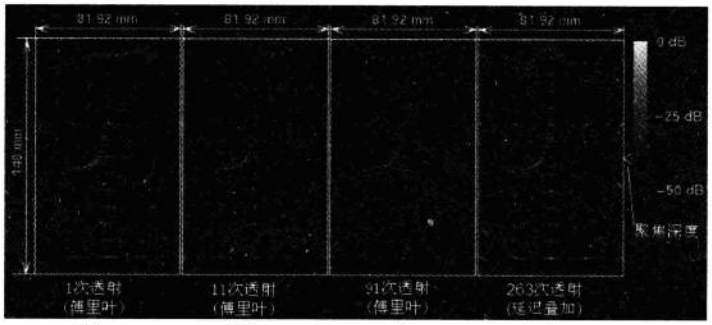
利用有限衍射阵列声束和偏转平面波透射，得到试块 1 的重建图像分别如图 10.8 和图 10.9 所示。透射次数分别为：图 10.8(a)和图 10.9(a)为 1 次透射，即 5500 帧/s；图 10.8(b)和图 10.9(b)为 11 次透射，即 500 帧/s；图 10.8(c)和图

10.9(c)为 91 次透射，即 60 帧/s；图 10.8(d)和图 10.9(d)为 263 次透射，即 21 帧/s。图 10.8(d)和图 10.9(d)为由传统的延迟叠加方法得到，透射焦距为 70mm，其他三组均由傅里叶成像算法得到。



(a) (b) (c) (d)

图 10.8 有限衍射阵列声束处理得到试块 1 二维图像



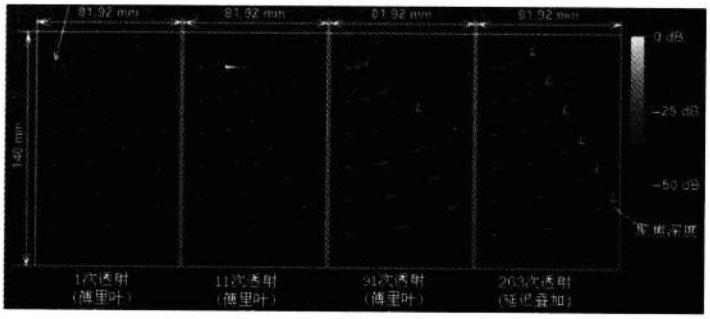
(a) (b) (c) (d)

图 10.9 偏转平面波处理得到试块 1 二维图像

可以看到，与传统延迟叠加技术的图像相比，利用有限衍射阵列波束和偏转平面波透射得到的图像分辨率高，旁瓣小，即使是 1 次透射，三者也能得到相近的结果。利用有限衍射阵列波束和偏转平面波透射得到的图像相似，只是前者的分辨率稍高。

试块 2 的图形重建结果如图 10.10 所示，图 10.10(a)为有限衍射阵列波束结果，图 10.10(b)为偏转平面波结果，图 10.10(c)为给定焦距延迟叠加结果，图 10.10(d)为动态聚焦技术结果。可以看到，图 10.10(a)、图 10.10(b)和图 10.10(d)都得到了较高质量的图像，但是图 10.10(d)为将各个聚焦区域图像拼接得到，这个过程降低了图像帧率，增加了系统复杂度，而且分辨率比有限衍射阵列波和偏转平面波透射低。图 10.10(c)的给定焦距延迟叠加得到的图像质量最差。有限衍射阵列波和偏转平面波透射都是计算速度快的快速傅里叶变换，不同的是透射处理方法：前者采用正

弦或余弦加权得到有限衍射阵列波，后者采用线性时间延迟得到偏转平面波。



(a)　(b)　(c)　(d)

图 10.10　各种方法处理得到试块 2 二维图像

10.3　合成孔径算法[6,8,9]

合成孔径聚焦技术(synthetic aperture focusing technique，SAFT)于 20 世纪 70 年代开始用于超声成像。它以点源探头在被测物体的表面开始扫描，接受来自物体内部各点的散射信号并加以存储，然后对不同探头位置接收到的信号引入适当的延迟并叠加，得到逐点聚焦成像。

与传统的超声成像方式不同，合成孔径聚焦成像可以通过较小的探头孔径获得较高的分辨率和信噪比。根据发射和接收探头孔径的不同，可以分为四种成像方式：①合成孔径聚焦，每次发射和接收只有一个阵元有效；②多阵元合成孔径聚焦，每次发射有多个阵元有效；③合成接收孔径，工作模式为全孔径发射，子孔径接收；④合成聚焦，工作模式为子孔径发射，全孔径接收；⑤合成发射孔径，工作模式为多阵元发射，全孔径接收。

合成孔径聚焦的原理如图 10.11 所示，其合成波束可以表示为

$$S_{\mathrm{SAFT}}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{N-1}s\left(t-\frac{2r}{c}-2\tau_n\right) \tag{10.3.1}$$

式中，$s(t)$表示发射信号；r 表示子孔径与计算点距离；c 表示波速；τ_n 表示发射和接收的延迟时间。当阵元发射单色波时，由式(10.3.1)可以得到

$$S_{\mathrm{SAFT}}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\left(-\frac{2r}{c}-2\tau_n\right)} \tag{10.3.2}$$

由空间几何关系可以得到延迟时间 τ_n 为

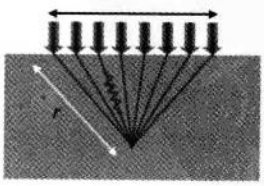


图 10.11　合成孔径空间几何关系

$$\tau_n = \frac{r - r_n}{c} \tag{10.3.3}$$

对于远场区，τ_n 可以近似为

$$\tau_n = \frac{x_n \sin\theta}{c} \tag{10.3.4}$$

将式(10.3.4)带入式(10.3.2)，得到

$$S_{\mathrm{SAFT}}(\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{2r}{c}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega 2\tau_n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{2r}{c}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega 2x_n \sin\theta} \tag{10.3.5}$$

忽略常量 r 的应用，对剩余项进行求和，得到合成波束为

$$P_{\mathrm{SAFT}}(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega 2x_n \sin\theta} = \frac{\sin(kNd\sin\theta)}{\sin(kd\sin\theta)} \tag{10.3.6}$$

对于多阵元合成孔径聚焦，合成波束为

$$P_{\mathrm{MSAFT}}(\theta) = \frac{\sin(k(N-L+1)d\sin\theta)}{\sin(kd\sin\theta)} \frac{\sin(kLd/(2\sin\theta))}{\sin(kd/(2\sin\theta))} \tag{10.3.7}$$

对于合成接收孔径，合成波束为

$$P_{\mathrm{SRA}}(\theta) = \frac{\sin(kNd/(2\sin\theta))}{\sin(kd/(2\sin\theta))} \tag{10.3.8}$$

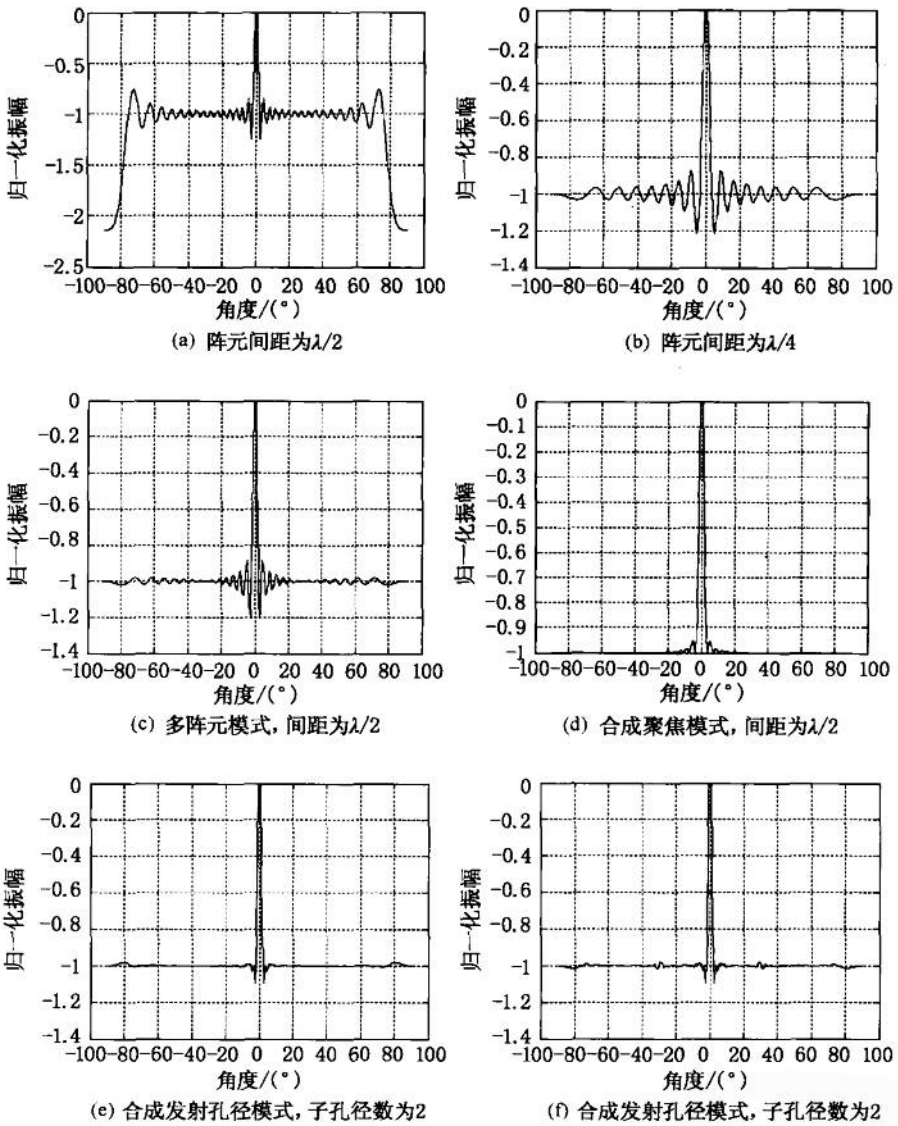
对于合成聚焦，合成波束为

$$P_{\mathrm{SF}}(\theta) = \left[\frac{\sin(kNd/(2\sin\theta))}{\sin(kd/(2\sin\theta))}\right]^2 \tag{10.3.9}$$

对于合成发射孔径，合成波束为

$$P_{\mathrm{STA}}(\theta) = \frac{\sin(kNd/(2\sin\theta))}{\sin(kLd/(2\sin\theta))} \frac{\sin(kNd/(2\sin\theta))}{\sin(kd/(2\sin\theta))} \tag{10.3.10}$$

图 10.12 分别为利用上述公式计算得到的各种工作模式下的波束指向性图。探头单元 $N=32$，中心频率 $f=3.5\mathrm{MHz}$，声速 $c=1500\mathrm{m/s}$，取阵元间距为 $\lambda/2$ 和 $\lambda/4$，得到的指向性如图 10.12(a)和图 10.12(b)所示，可以看到，间距为 $\lambda/2$ 得到的图像旁瓣较大。利用多阵元模式，选取子孔径数 $L=4$，间距为 $\lambda/2$，得到指向性如图 10.12(c)所示，可以看到，与图 10.12(a)相比，多阵元模式对旁瓣的抑制效果明显。所以说多阵元模式可以降低对探头间隔的要求。利用合成聚焦模式，选择间距为 $\lambda/2$，得到指向性如图 10.12(d)所示，可以看到波束指向性好，对旁瓣的抑制也好，但是这种模式系统复杂，计算量大。利用合成发射孔径模式，阵元间距为 $\lambda/2$，子孔径为分别为 2 和 4，得到指向性图如图 10.12(e)和图 10.12(f)所示，可以看到子孔径越小，波束聚焦效果越好，子孔径的大小可以作为平衡成像质量和系统复杂度的参数。



(a) 阵元间距为λ/2　(b) 阵元间距为λ/4

(c) 多阵元模式，间距为λ/2　(d) 合成聚焦模式，间距为λ/2

(e) 合成发射孔径模式，子孔径数为2　(f) 合成发射孔径模式，子孔径数为2

图 10.12　波束指向性图

为了提高成像质量，通常将 SAFT 进行一些改进，2R-SAFT 即是这样一种改进技术，该方法采样一个发射阵元、两个接收阵元。2R-SAFT 可以有效抑制旁瓣，提高信噪比，同时简化成像硬件系统。利用 2R-SAFT 得到的扇扫图像和传统 SAFT 技术的对比如图 10.13 所示，成像范围为 $R/40$ 到 $R/10$ 之间，其中 $R=D^2/4\lambda$，阵元数 $N=128$，阵元间距 $d=\lambda/2$。图 10.13(a)～(d)分别为传统 SAFT 技术、矩形变迹 2R-SAFT 技术、三角形变迹 2R-SAFT 技术和相控阵技术得到的扇扫图

像，图像动态范围为 60dB。可以看到，传统 SAFT 得到的图像出现旁瓣，而 2R-SAFT 得到的图像中，旁瓣完全消失；2R-SAFT 得到图像的质量高低与选择是否合适的变迹形状相关，当选择三角形变迹时，得到的图像质量更高，与相控阵系统得到的图形非常相近。

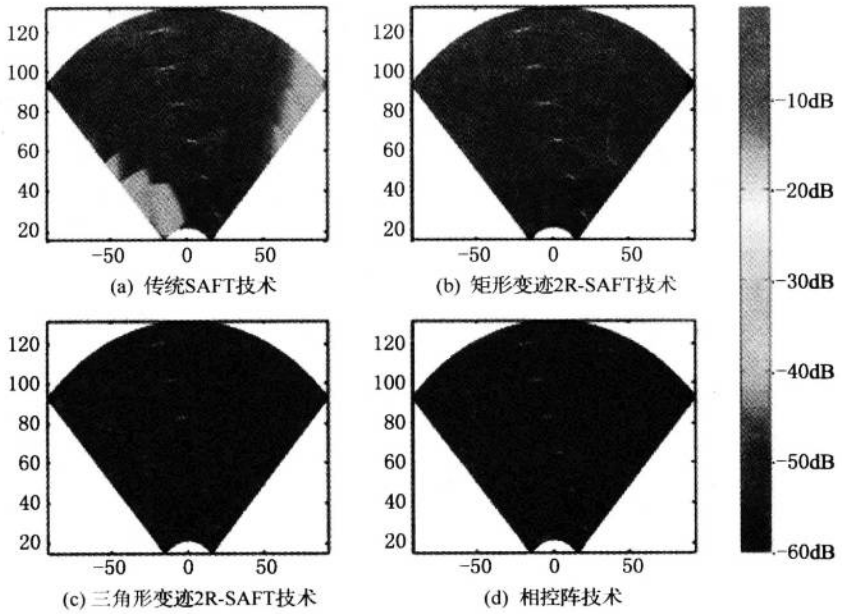


图 10.13 各种算法得到的扇扫图像对比

10.4 三维成像算法

随着计算机技术、电子技术、图像处理技术的发展，工程与医学有机结合，使得超声二维成像技术向三维成像的发展成为可能[10~12]。三维成像算法主要包括四个步骤：原始图像的获取、图像预处理、三维重建、图像的三维显示。原始图像的获取即原始数据采集，目前常用的采集方式有机械扫查和二维面阵技术，采集必须满足两个要求：①图像序列的位置和角度必须准确，②为了避免组织的活动影响，采集速度要快。图像的预处理过程，通过减少数据量或插值处理得到有效的数据信息，常用的方法有降噪、参数域变换等。三维重建即将经过处理的原始二维图像数据，生成三维可以供绘制的几何图元和属性。一种方法是从二维图像序列中分割出有效区域重建，另一种方法是将二维图像序列构造成三维体素。图像的显示算法包括两类：一类是表面三维重建，根据处理数据的方法不同，又可以分为基于二维轮廓拼接法和基于等值面提取法；另一类是直接体式化，无需任何中间二维图元。

现以体绘制光线投射(ray casting)算法进行生物体三维图像的显示。体绘制算法不需要通过三维重建来恢复体数据中的物体表面，而是直接地对体数据进行显示。体绘制包括视见变换和明暗计算两个过程。视见是指将三维物体从物空间投影到二维像平面，并消除被遮挡物体的过程。明暗计算是指基于文法结构浓淡计算、深度梯度估算法向量和灰度梯度近似估算法向量等实现亮度分配。

(1)光线投射法原理。光线投射体绘制方法的思想是从像平面上每一个像素出发沿视线方向发出一条射线进入物空间，在射线传播过程中，将其所遇到的体素衍射和阻光度进行累加合成。当阻光度为 1 或者射线穿过体素空间时，停止传播，然后把当前合成颜色作为像素颜色写入帧缓存。算法流程：①根据数据特征，对采样值分类；②根据成像需要，给被检物质赋予一定的色彩和透明度；③由体绘制光学模型，运用色彩合成算子为单个像素进行色彩累积计算。

(2)光线投射法的光学模型。直接体绘制的基本原理就是近似地模拟光线穿过二维数据场产生的一系列光学现象，并通过相应的光照明模型将三维数据场中采样信息以图像的形式表示出来。三维数据场中的体素都将被假想成微小颗粒，这些体素整合在一起便构成了光传输媒质。这种媒质被认为是具有颜色和半透明特性的“胶体”物质，并且颜色和不透明度都是体素的函数。

对视点发出的光线在三维数据场穿越路径上做积分计算，便可计算出像素点的光亮强度，数学公式如下：

$$I(a,b)=\int_a^b s(x)\exp\left(-\int_0^x \tau(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \tag{10.4.1}$$

式(10.4.1)也称为体绘制方程。式中，$I(a,b)$表示光线从数据场中点 a 到点 b 的光亮强度总和；$s(x)$是光源即投射光线上单位长度的光亮值；$\tau(t)$是光亮强度的衰减因子。

$$T(s)=\exp\left(-\int_0 \tau(t)\mathrm{d}t\right) \tag{10.4.2}$$

式(10.4.2)则表示光线达到 s 后的光亮强度，也称之为透明度。如果定义 A 为这段距离的不透明度，则有

$$A=1-T(s)=1-\exp\left(-\int_0 \tau(t)\mathrm{d}t\right) \tag{10.4.3}$$

(3)空间坐标变换。光线投射算法中需要从屏幕上的像素点向三维数据场投射光线，这就涉及如何将像空间(观察坐标系)上的一点映射到物空间(模型坐标系)或将物空间中的一点映射到像空间上。这需要通过坐标变换进行上述两空间的相互映射。假定从物空间到像空间的衍射矩阵为 M，则物空间上的点 P 映射到像空间点 P 可以为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & e & i & m \\ b & f & j & n \\ c & g & k & p \\ d & h & l & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \tag{10.4.4}$$

(4)插值运算。由于从成像平面进行光线投射，并沿着每条投射光线等距离采样，在实际中采样点往往并不是正好落在体素上，为了获得点 P 的采样值，需要通过它周围的体元进行加权求和得到，这个加权运算就是通常说的插值运算。常用的三维线性插值公式为

$$\begin{aligned} V_p = & V_A(1-x_p)(1-y_p)(1-z_p) + V_E(1-x_p)(1-y_p)z_p \\ & + V_B x_p(1-y_p)(1-z_p) + V_F x_p(1-y_p)z_p \\ & + V_C(1-x_p)y_p(1-z_p) + V_G(1-x_p)y_p z_p \\ & + V_G x_p y_p(1-z_p) + V_H x_p y_p z_p \end{aligned} \tag{10.4.5}$$

式中，A、B、…、G 表示采样位置周围的体素位置；变量 V_A、…、V_H 对应的是体素位置的数据值。

(5)光照与明暗模式。明暗计算首先是计算三维数据场的梯度并保存，以便在后面的计算中直接调用。梯度是用来衡量体数据采样值变化快慢的，常用中心差分法计算：

$$\nabla F_{i,j,k} = \begin{bmatrix} F_x(x_i, y_j, z_k) \\ F_y(x_i, y_j, z_k) \\ F_z(x_i, y_j, z_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{F_{i+1,j,k} - F_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \\ \dfrac{F_{i,j+1,k} - F_{i,j-1,k}}{2\Delta y} \\ \dfrac{F_{i,j,k+1} - F_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \end{bmatrix} \tag{10.4.6}$$

然后利用光照模型进行明暗计算，常用的冯光照模型包括：环境光、漫反射和镜面反射。环境光源是绘制场景中任何位置处都具有同样强度的光照，它是一个无方向性的光源。被环境光照射的物体的颜色赋值公式如下：

$$C_0 = C_a k_a O_d \tag{10.4.7}$$

式中，C_0 是颜色结果值；C_a 为颜色初始值；k_a 是被称为环境散射系数的材质特性(一般取值范围在 0 到 1 之间)；O_d 是绘制物体上光照点的散射颜色。漫反射是场景中点光源被物体向各个方向均匀散射的现象。这里点光源是方向光源，因此物体表面的法向量与光源方向之间的夹角 θ 将作为计算的一个因子。冯光照模型的漫反射颜色计算公式如下：

$$C_0 = C_a k_a O_d + C_p k_d O_d \cos\theta \tag{10.4.8}$$

式中，C_p 是点光源颜色值；k_d 是漫反射系数。光源强度的绝大部分被物体按一个方向反射称为镜面反射。反射光强度落入这个反射方向的大小快慢是由镜面反射

指数 n 控制。一个完整冯光照模型的颜色计算公式如下：

$$C_0 = C_a k_a O_d + C_p(k_d O_d \cos\theta + k_s O_s \cos\phi) \tag{10.4.9}$$

式中，O_s 是镜面反射颜色值；k_s 是镜面反射系数；ϕ 为反射方向与视线方向的夹角。

(6)数据分类。医学三维可视化的一个重要优势就是允许观察者能够看到成像物体内部组织结构，而这正是通过对体数据的分类操作达到的。体数据的分类是将数据场中的数据分成不同类型，每种类型代表一种物质，然后将代表不同物质的采样值赋以不同的透明度。体数据的分类过程可以被看做一个函数映射，它将三维数据采样点的属性值映射为不透明度，其函数表达式可写成：

$$a = O(I_i, |\nabla_i|, \cdots) \tag{10.4.10}$$

式中，a 为不透明度；I_i 和∇_i是第 i 个体素中的采样值和梯度向量；$O(\cdots)$表示传递函数。传递函数就是把本身不包含透明度等光学信息体数据进行转化，使其具有这样的物理属性并进行三维显示。传递函数包含不同类型的变量越多，则分类效果越好，但是也就越复杂。

(7)图像的合成。根据前面的叙述，从屏幕上的每个像素点向三维数据场进行光线投射，然后等步长采样，采样点经过插值、光照计算和分类计算得到其颜色值和不透明值。这样一条光线上就会得到若干采样点的颜色、不透明度值，但是一条投射光线只对应屏幕中的一个像素值。因此需要将同条投射光线上的多个采样点颜色值和不透明度值进行合成，这就是图像合成操作。将指数项用泰勒级数展开，则光亮强度可以写为

$$I(a,b)\sum_{x=a}^{b}\left(S_x\prod_{t=a}^{x-1}(1-a_t)\right) \tag{10.4.11}$$

式中，a_t 为数值点位置变量；S_x 为投射光线上单位长度的亮度值。图像合成操作就是对式(10.4.11)的迭代运算。若采样 over 算子，则将式(10.4.11)改写为

$$\begin{aligned} I(a,b) &= S_0 + S_1(1-a_0) + \cdots + S_{n-1}(1-a_0)\cdots(1-a_{n-2}) \\ &= S_0 \text{over} S_1 \text{over} \cdots \text{over} S_{n-1} \end{aligned} \tag{10.4.12}$$

若采用由前向后的合成公式，则数学迭代公式可以写为

$$\begin{aligned} I_{out} &= I_{in} + S_i a_{in}(1-a_{in}) \\ a_{out} &= a_{in} + a_{in}(1-a_{in}) \end{aligned} \tag{10.4.13}$$

式中，I_{out}、a_{out}表示当前采样点 i 的光亮强度和不透明度的迭代值；I_{in}、a_{in}表示上一采样点 $i-1$ 的光亮强度和不透明度的迭代值。

图 10.14 和图 10.15 为用光投射体绘制算法得到的超声三维图像。图 10.14(a)和图 10.14(b)分别为典型的圆柱形和长方体组织模型的三维图像。图 10.14(c)为胎儿右手三维图像，可以看到，尽管图像表面不如真实组织光滑，但是手和手指清晰可辨。图 10.15(a)为手指三维图像，图 10.15(b)为前臂图像，图 10.15(c)为

在图 10.15(b)所示位置的切片图像，图 10.15(d)为在相同位置重建的 B 扫描图像。

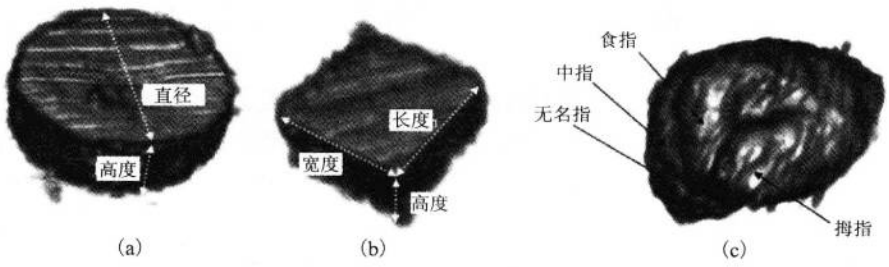


图 10.14 组织模型三维图像显示

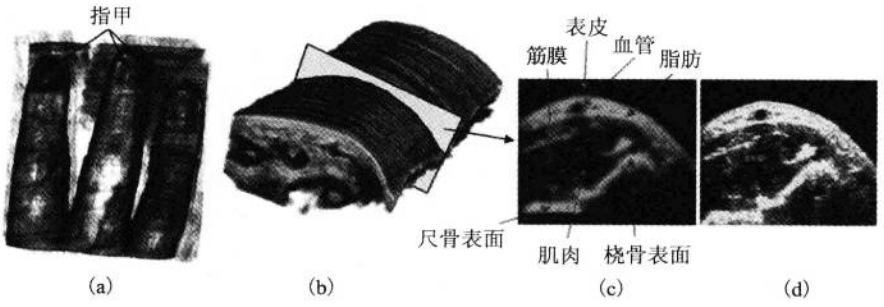


图 10.15 活体组织的超声三维图像显示

参 考 文 献

[1] Guo Z Y, You S H, et al. A FEM-based direct method for material reconstruction inverse problem in soft tissue elastography[J]. Computers and Structures, 2008, 6: 1-10.

[2] Liu K, Zhang P F, et al. A 2D strain estimator with numerical optimization method for soft-tissue elastography[J]. Ultrasonics, 2009, 49(8): 723-732.

[3] Khaled W, Reichling S, et al. Ultrasonic strain imaging and reconstructive elastography for biological tissue[J]. Ultrasonics, 2006, 44 (1): 199-202.

[4] Baldewsing R A, de Kort C L, et al. Finite element modeling and intravascular ultrasound elastography of vulnerable plaques: Parameter variation[J]. Ultrasonics, 2004, 42(1～9): 723-729.

[5] Hu P, Lu J Y, et al. A general model of high frame rate imaging system[C]. Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference Shanghai, China, 2005: 1861-1864.

[6] 彭虎. 超声成像算法导论[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2008.

[7] Cheng J Q, Lu J Y. Extended high-frame rate imaging method with limited-diffraction

beams[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control, 2006, 53(5):880-899.

[8] Martín C J, Martinez O, et al. Reduction of grating lobes in SAFT images[J]. IEEE International Ultrasonics Symposium Proceedings, 2008:721-724.

[9] Leevesque D, Blouin A, et al. Performance of laser-ultrasonic F-SAFT imaging[J]. Ultrasonics, 2002,40(10):1057-1063.

[10] 侯迎宾. 医学超声三维重建研究与实现[D]. 北京:北京交通大学,2007.

[11] Fenster A, Surry K, et al. 3D ultrasound imaging: Applications in image-guided therapy and biopsy[J]. Computers & Graphics, 2002, 26 (4):557-568.

[12] Huang Q H, Zheng Y P, et al. Development of a portable 3D ultrasound imaging system for musculoskeletal tissues[J]. Ultrasonics, 2005, 43 (3):153-163.

第 11 章　计算超声软件及应用

超声场计算在超声无损检测中扮演着越来越重要的作用，从最初的检测结果分析、能力验证、方法设计和优化，再到后来的“虚拟检测”，计算超声技术的应用也变得越来越多样，吸引了大批专业技术人才加入到这一行业之中，开发了多种用于超声仿真的软件。其中，代表性的主要包括：CIVA、Imagine3D、simSUNDT、VNDE、UT-Sim、Wave3000 Pro 等[1]。

11.1　CIVA

在 20 世纪 90 年代早期，法国原子能委员会(French Atomic Energy Commission)开始开发用于超声仿真方面的软件，命名为 CIVA。软件中集成了数据处理、成像和模拟工具，可以直接、方便地将实验数据和计算数据进行对比。经过多年的研究，法国原子能委员会发布了 CIVA 的不同版本，不断地将其最新的研究成果集成到软件之中。

CIVA 软件最初主要用于分析核电厂检测所获得的超声信号。但是，最近几年随着 CIVA 对最新研究成果的集成，其应用范围不仅包括了核工业部门，同时还扩展到了其他不同的工业部门，比如航空工业、高速铁路中。

早期，CIVA 软件中只包含法国原子能委员会所开发的超声仿真模型。现在，随着软件开发的不断深入，CIVA 中不仅包含了超声仿真、涡流仿真模型，而且正在集成 X 射线仿真方面的内容。另外，在合作的框架下，法国原子能委员会也将欧洲其他实验室所开发的模型和数据处理算法集成到了 CIVA 之中。

11.1.1　软件介绍[2]

CIVA9.0 主界面如图 11.1 所示，包括超声模块(UT Modeling)、涡流模块(ECT Modeling)和射线模块(XRay Modeling)。“UT Modeling”菜单包含与超声检测模拟相关的模块：Beam Computation 和 Defect Response。

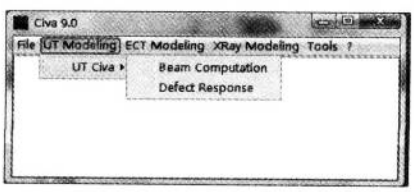


图 11.1　CIVA 主界面

1. Beam Computation 模块

在 CIVA 软件中，Beam Computation 模块主要用于计算探头在工件某位置处所形成的瞬时超声场，该模块的应用窗口如图 11.2 所示。

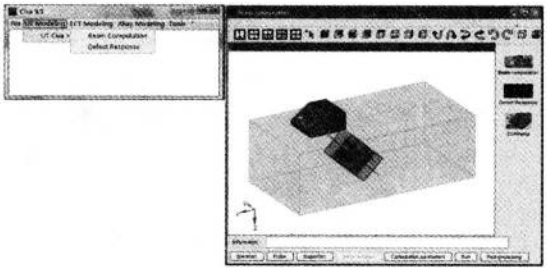


图 11.2　Beam Computation 模块的应用窗口

图 11.2 中的窗口显示了整个模拟的检测构成，包括工件外形、探头形状、探头扫查位置等。窗口的上部和下部菜单栏中提供了各种文件和参数选项，用户可以根据自己的需要来定义工件(包括工件几何形状和材料)、探头(包括探头类型、几何形状和声学特性)、检测参数(包括探头相对于工件的位置以及周围的介质)、计算类型(包括波形选择、有无底面反射、模式转换)等。

Beam Computation 模块中的工件可以是同种材料，也可以是由几种不同材料组成(比如堆焊等结构)。每种材料可以是各向同性的，也可以是各向异性的。材料的声学特性，包括衰减系数，都可以由用户自己定义。

在实际计算中，Beam Computation 模块可以使用接触式、液浸式的单晶探头或者相控阵探头。探头的声源面既可以是平面，也可以是曲面。

在 Beam Computation 模块的计算中，首先需要定义工件和探头，然后需要确定检测中探头所处的位置及工件所处的环境，最后需要对计算进行设置(包括计算方法、计算区域、存储方式等)。

2. Defect Response 模块

Defect Response 模块的应用窗口如图 11.3 所示，与 Beam Computation 模块相同，应用窗口的上部菜单栏也主要用来定义文件(包括了文件的读/写操作)，下部的菜单栏用来定义检测构成。不同之处在于下部菜单可以用来定义缺陷参数。

Defect Response 模块中的基本模型包括基尔霍夫衍射理论模型、GTD 和波恩近似模型。Defect Response 模块中可以定义各种类型的相控阵探头：线性的、矩阵式的和圆形的；同时能够计算标准和高级探头的延迟率。对于复杂的几何外形和异种材料，延迟率的计算是在扫描轴线的每个探头点上单独计算的。该模块

能够设计和模拟从最简单到最复杂的任何相控阵技术。

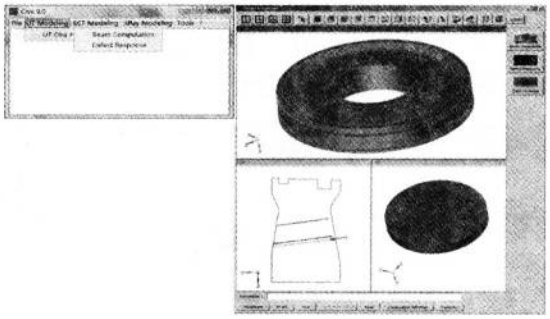


图 11.3 Defect Response 模块的应用窗口

11.1.2 应用情况

在超声仿真方面，CIVA 软件主要应用在以下几个方面：①帮助科研人员或者无损检测人员分析实验数据（如复杂的信号等），从而提高缺陷的辨识、定位和定量分析；②能力验证，通过模拟计算确定某一检测方法的能力，及其在工程实际中的实用性和可靠性；③通过模拟仿真设计和优化检测方法，特别是对于相控阵技术，模拟方法可以确定实际中所需要的探头形状和最优延迟率，从而提高相控阵技术在实际应用中的能力；④“虚拟检测”，能够为工件早期设计提供帮助。

1. CIVA 软件在数据分析方面的应用[3,4]

利用 CIVA 软件模拟实际的检测构成，并将模拟结果和实验结果直接进行对比，以分析检测中所得到的各种回波信号、确认各种回波的种类和性质，从而提高缺陷的辨识、定位和定量分析。

工件外形的不规则会使得工件内超声波束发生变形，并会影响到缺陷的回波信号，从而使得利用回波信号对缺陷的分析和定位产生很大的困难。为此，法国原子能委员会专门开发了用于缺陷定位的方法，并将其包含在 CIVA 软件内。这种方法的出发点是选择实验得到的回波 B 扫描图（见图 11.4(a)），并将其进行处理，提取出回波在传播空间的扫描位置/时间上的坐标(X,T)（见图 11.4(b)）。

为了确定(X,T)处回波所对应的缺陷的可能位置，研究人员利用 CIVA 软件计算了三维的超声场。利用 X 值，将相应的探头定位在工件的 CAD 图中（见图 11.4(c)）。同时，利用 CIVA 软件计算超声场中每点处的传播时间，将这些传播时间和时间 T 进行比较，并应用波幅的阀值，就可以得到缺陷的可能位置（见图 11.4(d)）。然后计算这些可能位置处的 B 扫描图（见图 11.4(e)），并将这些模拟结果和实验结果进行对比，就可以得到缺陷最可能的位置（见图 11.4(f)）。

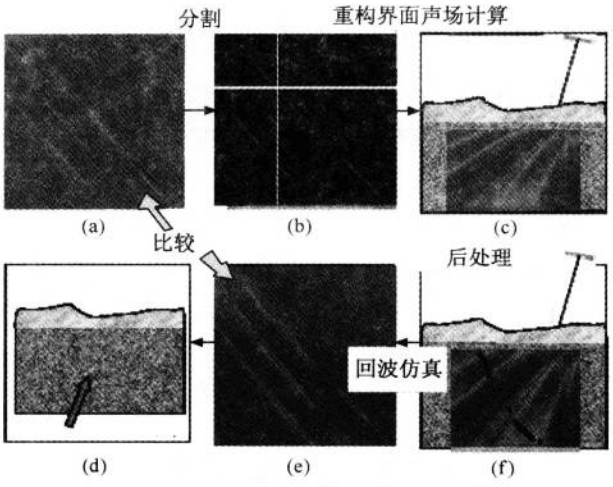


图 11.4　CIVA 中的缺陷定位方法

2. CIVA 软件在能力验证方面的应用[5,6]

在能力验证中，CIVA 软件可通过模拟确定某一检测方法的能力，及其在工程实践中的实用性和可靠性。

此项工作是由法国电力公司(EDF)完成的，用以研究 CIVA 软件在 V 形焊缝检测中的可行性，并进而得到 $T45°$的检测构成在检测几何外形复杂的焊缝时的能力。该研究的检测构成如图 11.5(a)所示。从实验结果(见图 11.5(b))和模拟结果(见图 11.5(c))，可以观察到：由于镜面反射，焊缝的根部产生了强烈的回波。

在此项研究中，计算得到的 B 扫描图能够帮助分析实验的结果，同时也验证了 CIVA 软件在 V 形焊缝检测中的可行性。

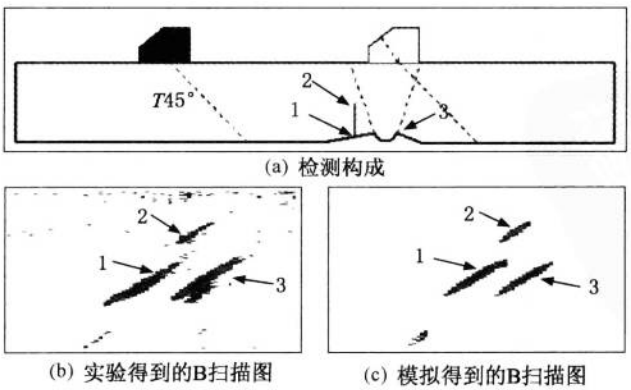


图 11.5　包含缺陷的 V 形焊缝的检测模拟

3. CIVA 软件在检测方法设计和优化方面的应用[7~9]

通过超声仿真，CIVA 软件可以对检测方法进行设计和优化，特别是对于相控阵技术，模拟方法可以确定实际应用中所需要的探头形状和最优延迟率，进而提高相控阵技术在实际应用中的能力。

模拟方法对探头的设计是非常有帮助的，通过计算工件中的透射波束可以对探头的关键参数进行优化（如相控阵探头中各晶片的尺寸和中心距）。

在探头设计方面，法国原子能委员会开发了专门用于改善复杂形状工件检测能力的柔性接触式相控阵探头。此探头是由 24 个晶片（2MHz，2mm 的中心距）机械连接而成的，可与非规则表面相匹配（见图 11.6），并因此降低了使用常规接触式探头所造成的精度损失。

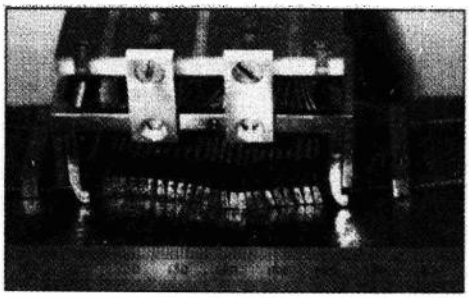


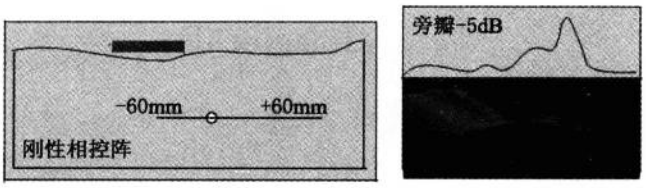
图 11.6 位于复杂外形工件上的柔性接触式相控阵探头的原型机

根据实际工件的外形和探头晶片所处的位置，探头应用不同的延迟率来控制波束的方位和聚焦深度。

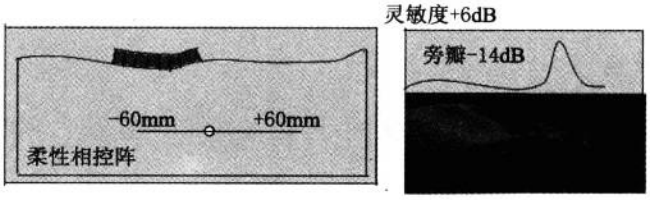
图 11.7 中显示了两种不同的探头对复杂外形下波束的模拟。其中一个是利用相同孔径的“刚性”相控阵探头得到的（见图 11.7(a)），另一个是使用柔性相控阵探头计算得到的（见图 11.7(b)）。通过对比可以看出，采用柔性接触式相控阵探头可以更正常规探头检测中出现的精度损失、波束的偏离和发散。同时，实验也证明这些结果是有效的。

4. CIVA 软件在超声仿真其他方面的应用[10,11]

本项工作是法国原子能委员会与欧洲航空防卫与空间公司（EADS）合作完成的。工作的目的就是要预测 CIVA 软件对碳纤维增强环氧树脂复合材料工件检测时的能力。工件具有非平面的几何外形，并且包含非平行的层板（见图 11.8）。模拟中采用了同质方法（method of homogenization），将连续的平行层用一个性质相同的各向异性的介质来取代。



(a) “刚性”相控阵探头下的检测

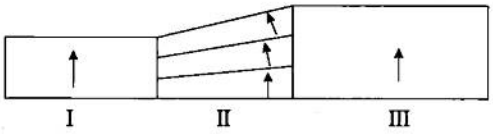


(b) 柔性接触式相控阵探头下的检测

图 11.7　复杂外形工件上的超声场模拟



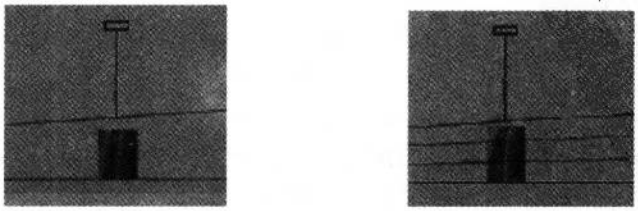
(a) 工件的示意图（点画线表示了层板的方位）



(b) 同质化后的工件图

图 11.8　多层复合材料的同质化

通过这种方法，可以得到聚焦液浸式探头在垂直入射时的透射波束。从图 11.9 中可以看出表面的不平整所引起的偏差会部分被板层方位的变化所抵消。计算结果与实验观察结果是一致的，从而也证实了 CIVA 模拟检测碳纤维增强环氧树脂复合材料工件的可行性。



(a) 没考虑板层方位变化时的计算结果　(b) 考虑了板层方位变化时的计算结果

图 11.9　复合材料工件的检测模拟

11.2 Imagine3D

Imagine3D是加拿大的UTEX科学仪器公司开发的一套用于超声仿真的软件[12~15]。它能够模拟三维工件中超声场，并能够以不同的颜色显示纵波和横波之间的模式转换。模拟得到的A扫描图能够验证实际检测信号的强度和位置。

11.2.1 软件介绍

Imagine3D中包含两种类型的文件：可选文件和必选文件。软件中的文件结构如图11.10所示。

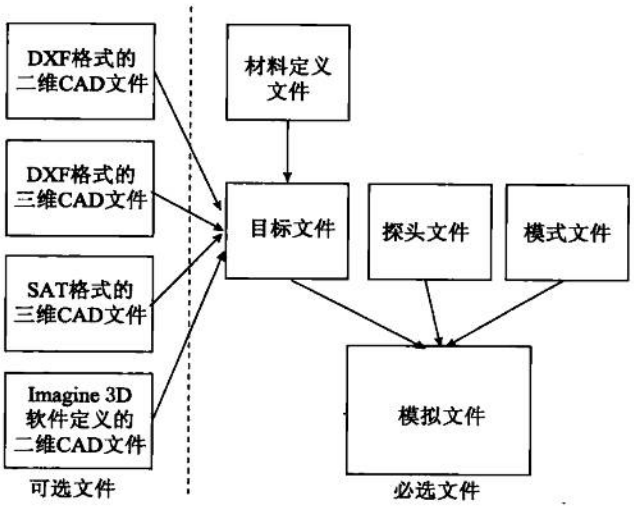


图11.10 Imagine3D中的文件结构

Imagine3D主界面如图11.11所示。Imagine3D中的可选文件主要用于工件结构定义，包括以DXF格式定义的二维和三维CAD文件，SAT格式定义的三维CAD文件和Imagine3D软件定义的二维CAD文件。Imagine3D模拟的工件主要是立方体、圆柱、圆管、球等简单的几何形状。这些几何实体既可以是CAD软件中的三维图，也可以是Imagine3D中自带的三维图形(Imagine3D中带有图形库，稍加修改即可以得到模拟中需要的图形)。必选文件中包括：材料定义文件(参数表格)、目标文件、探头文件、模式文件和模拟文件等。

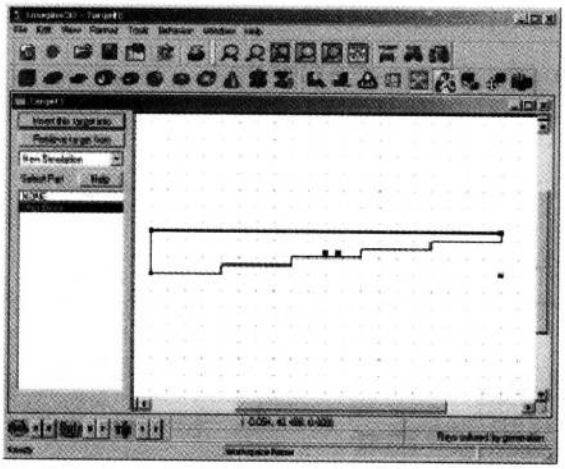


图 11.11　Imagine3D 中的某一目标文件

材料文件可以存储很多通用材料的声速、密度和声阻抗。用户可以添加需要的数据到表格中。材料特性文件可以作为一个单独文件存在，所以这些文件可以在其他的项目中使用或者被其他人共享。目标文件主要帮助用户将实际的工件图形输入或者插入到 Imagine3D 的模拟文件中。检测文件可以由多个部分组成，用户只需将它们依次输入即可得到所要求的目标文件。

Imagine3D 可以模拟任意频率的接触式和液浸聚焦探头，它可以定义探头的主频、带宽、焦点深度、晶片尺寸和晶片形状等。探头的晶片可以是圆形、椭圆形或者矩形等形状。对于接触式探头，用户还可以定义斜楔的材料、尺寸和检测角度等。模式文件定义了模拟中需要显示的纵波和横波，用户可以选择不同的颜色或者线宽来表示模拟中不同的波形。

模拟文件就是超声检测的一个视图窗口。它负责存储模拟中所要求的所有的组元，包括探头文件、目标文件、模式文件和材料参数文件等。模拟文件视图包括了不同的窗口，用以显示声线跟踪、超声场模拟、A 扫描和模拟的文字描述等。

因为 Imagine3D 只能够计算工件内探头所形成的超声场，无法计算超声场与缺陷之间的相互作用，所以 Imagine3D 中不存在缺陷定义单元。

11.2.2　应用情况

Imagine3D 主要用于教学和探头订购等方面：在教学方面，Imagine3D 能够直观地显示某些关键角对纵波和横波产生情况的影响，进而可以帮助学生理解超声检测过程中超声波在工件中的传播过程。图 11.12 为计算得到 T 型接头声场传

播过程;在探头订购方面,由于 Imagine3D 能够计算特定探头的超声场,因而就能够帮助用户确定自己所需要的探头型号。

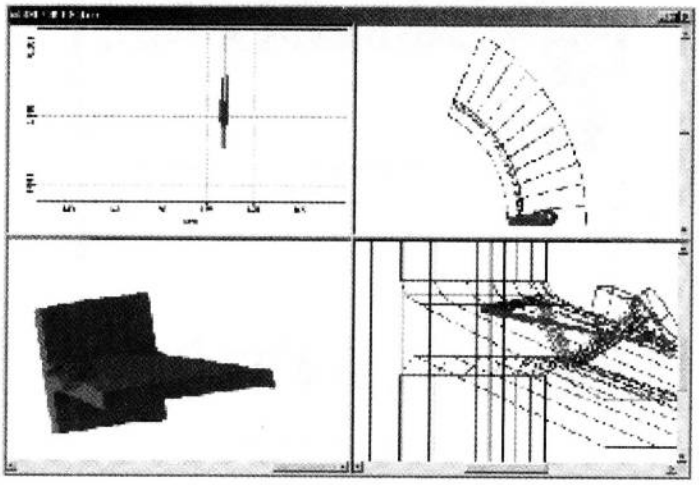


图 11.12 Imagine3D 中某一工件内的超声场

11.3 simSUNDT

simSUNDT 是瑞典无损检测模拟中心(SCeNDT)开发的一套用于超声仿真的计算机软件[16~19]。此软件的开发得到的瑞典认证中心(SQC)的资助。

11.3.1 软件介绍

simSUNDT 软件采用了 UTDefect 的计算内核。UTDefect 是 Chalmers 技术学院开发的一套基于 UNIX-FORTRAN77 的软件;随后,为了增加 UTDefect 软件的用户数量,机械分院的教授们将 UTDefect 转化为了现代的 PC 版本,即 SUNDT。后来,为了扩展 SUNDT 软件的应用范围,并与一些常用的分析软件相兼容,瑞典的无损检测模拟中心,在瑞典认证中心的资助下以 SUNDT 为基础,开发了 simSUNDT。

simSUNDT 软件主要用于模拟各向同性的同种材料中缺陷的超声检测过程。整个软件包括四个主要的组成部分:模拟的前处理单元;FORTRAN77 计算内核(即UTDefect);模拟的后处理单元;生成合成数据的 C++单元。

1. 前处理单元

模拟的前处理单元主要用来定义工件、探头、缺陷和计算过程等。

simSUNDT 软件将工件和计算过程的定义放置在了同一个窗口，即 Method 窗口，如图 11.13 所示。Method 窗口中包含有材料特性单元、标定单元、探头设置单元、时间及精度单元和网格及焊缝参数单元等。simSUNDT 软件中包含有一个内置的材料参数文件，material. dat。同时，用户也可以根据自己的需要来定义新的材料参数，Method 窗口中的标定单元主要用于完整地模拟实际的无损检测过程，以尽量降低模型和检测环境之间所产生的与硬件相关的偏差。参考反射体主要包括横通孔和平底孔。

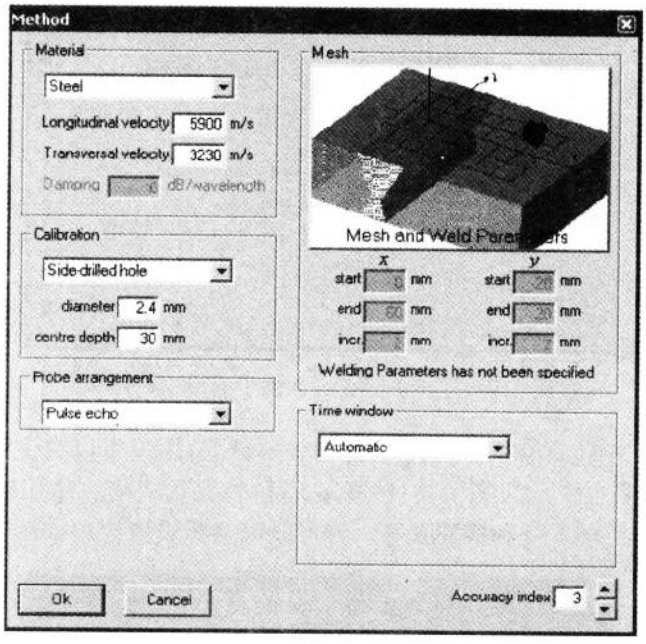


图 11.13　simSUNDT 软件中的 Method 窗口

在时间及精度单元中，为了优化计算时间同时不降低模拟的精度，Method 窗口中包含了精度指示选项。精度指示参数的取值范围为 1～5，默认值为 3。用户将该参数变大时，将会增加计算时间，同时提高模拟的精度；当用户将该参数变小时，正好相反。

对于网格及焊缝参数单元，Method 窗口中只包含有网格定义单元和焊缝选择选项，如图 11.13 所示。为了改变扫描区域和/或者定义任意类型的焊缝，用户可以点击 Method 窗口中的图片，即可得到网格及焊缝定义窗口。在网格及焊缝定义窗口中，用户可以定义网格起始区间和网格长度、信噪比、焊缝的几何形状、焊缝和材料参数等。焊缝的几何形状定义使用了五个参数，因而用户可以定义任意类型的焊缝，包括 X 型、Y 型和 V 型等。焊缝和材料的参数定义中主要包括了以下

参数:输入能量、初始温度、热效率、比热、初始晶粒尺寸、密度、熔点和热传导系数等。

Probe 窗口中包含有波的种类、角度、晶片形状和频谱等。探头设置窗口如图 11.14所示。

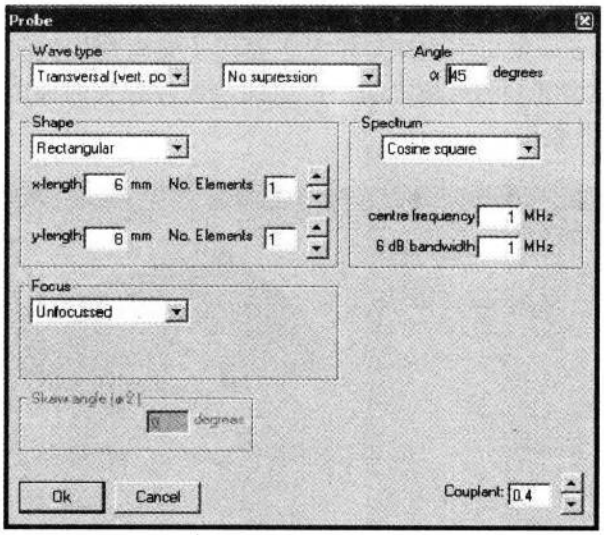


图 11.14 simSUNDT 软件中的 Probe 窗口

simSUNDT 中包含有很多几何形状简单的缺陷,用户可以自主进行选择。simSUNDT 中的缺陷主要分为两大类:体积缺陷和裂纹状缺陷。体积缺陷主要包括球形孔、球形夹渣、类球形孔和横通孔等。球形缺陷参数设置窗口如图 11.15 所示。

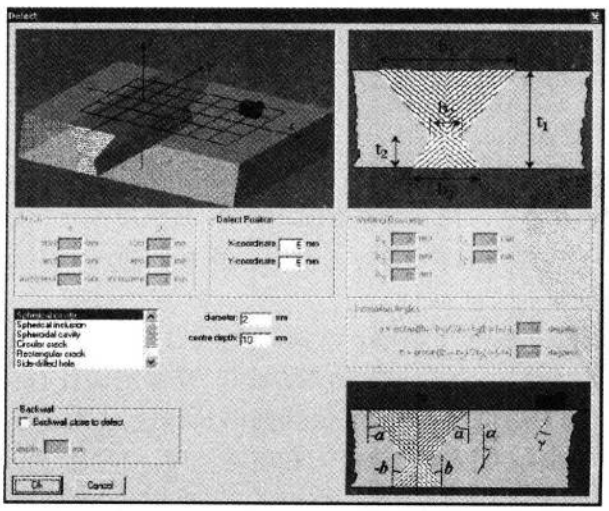


图 11.15 球形孔的定义窗口

球形缺陷可以用来模拟工件制造过程中形成的理想形状的孔洞。缺陷的定义参数包括缺陷的中心坐标(x，y，中心深度)和直径。相比于其他种类的缺陷，该类缺陷在计算时间上是最短的。

球形夹渣可以用来模拟焊接过程中所产生的熔渣。缺陷的定义参数主要包括缺陷的中心坐标(x，y，中心深度)和直径，同时还需要注明夹渣物的相对密度和其中的纵、横波速。

类球形孔的定义窗口主要包括缺陷的中心坐标(x，y，中心深度)和几何特性(包括偏转角等)。

模拟中的横通孔主要用作标定工具来使用，同时也可以当做可能的缺陷。定义窗口中主要包括缺陷的中心坐标(x，中心深度)和孔的直径。

2. 模拟的后处理单元

依据个人的需要，用户最后可以得到需要的 A 扫描图、B 扫描图和/或 C 扫描图，如图 11.16 所示。同时，对于每个模拟过程，用户还可以得到“.txt”形式的结果文件，其中包括定义模拟的各种参数和相应的 C 扫描的结果。

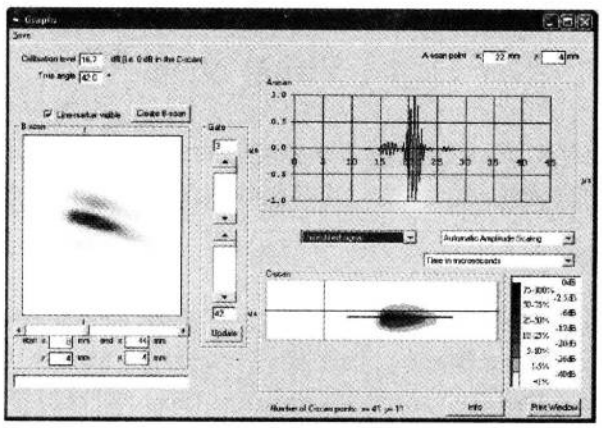


图 11.16　模拟结果的输出窗口(包括了
A 扫描图、B 扫描图和 C 扫描图)

11.3.2　应用情况

simSUNDT 软件已经被用于瑞典核电站在役检查手动超声检测程序的技术验证中。它的主要目的就是要对所使用探头的角度、频率和带宽进行优化，并得到这些参数的可使用的范围。

为了验证 simSUNDT 中的计算内核 UTDefect 的可靠性，在瑞典核电监管

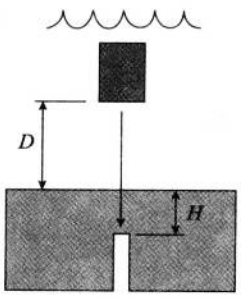


图 11.17 平底孔的检验构成

部门(SKI)资助下,Niklasson 等将 UTDefect 的计算结果和实验结果进行了对比。

下面以平底孔计算为例,介绍 simSUNDT 的应用。平底孔的高度 H 为 25.4mm,直径分别为 1.191mm(FBH # 3)、1.984mm(FBH # 5)和 3.175mm(FBH # 8)。检验构成如图 11.17 所示,实验和模拟结果如表 11.1 所示。从结果的对比中,可以看出两者之间相差甚小,从而证实了 simSUNDT 软件计算内核 UTDefect 的可靠性。

表 11.1 UTDefect 内核在平底孔验证中的实验和模拟结果分析

缺陷	实验/dB	UTDefect/dB	差值/dB
FBH # 3	−47.9	−46.9	−1.0
FBH # 5	−40.1	−38.6	−1.5
FBH # 8	−33.2	−31.7	−1.5

11.4 Vitual NDE

Virtual NDE(VNDE)是美国电力研究院(Electric Power Research Institute)开发的一套超声仿真软件,主要用于 NDE 操作人员的培训和能力测试[20,21]。

11.4.1 软件介绍

VNDE 软件的窗口组成如图 11.18 所示。其主要组成部分包括主菜单(Main Menu)、积分菜单(Scoring Menu)、程序模式(Program Mode)、场景(Scenario)、A-Scan显示(A-Scan Display)、位置框(Position Box)、圆管焊接区域(Pipe-Weld Area)、颜色选码(Key)以及控制模式(Control)。

在主菜单中,操作人员可以选择加载场景或者退出系统;积分菜单中可以得到基于场景表现的积分选项;程序模式中,操作人员可以选择练习模式或者能力测试模式;窗口左上角的场景选项中定义了超声检测的具体环境;在场景部分的下方,A 扫描显示区域显示了检测的 A 扫描结果;位置框中定义了探头在圆管焊接区域中的具体位置;圆管焊接区域位于整个窗口的右半部分,它定义了圆管和焊缝的几何形状和尺寸;颜色选码中定义了场景中相应的工件颜色;窗口中的控制模式选项位于 A 扫描显示区域的下方。

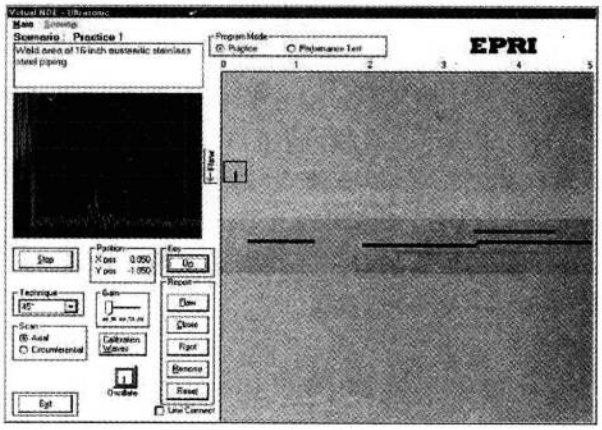


图 11.18　VNDE 软件的操作窗口

VNDE 软件中包含了三种程序模式：练习模式、测验模式和场景生成模式。其中练习模式为操作者提供了一系列不同情况下超声检测的机会，并能够及时地反馈操作者的练习状况。在检测练习中，操作人员可以在不同的技术中进行切换，执行轴向或者环向扫描，对探头进行旋转，改变增益量，选择扫描区域和探头方位等；操作人员还可以报告和显示任何缺陷的位置，同时将报告的缺陷信号图和圆管的几何外形图（其中表明了实际缺陷的位置）进行叠加，以对比检测结果的准确性。

测验模式主要用来评估操作者在超声检测中的技能。NDE 检测专家可以为操作者设置具体的工件、探头和检测模式，并将它们组成一个具体的检测构成。选择完毕后，测试会自动执行，同时软件会自动评估操作者的检测能力（包括检测结果的有效性、程序的应用和操作人员的信息处理情况）和熟练程度，并自动进行评分（包括详细地评估操作人员在检测过程中的长处和弱点）。

场景生成模式中，场景指的是具体的检测试样，以及与该试样相关的所有的材料和能力参数。例如，某一个圆管焊缝场景可能对应着一根直径为 12in、厚度为 1in 的不锈钢圆管，同时在焊缝的上侧包含着一个轴向缺陷。在场景生成模式中，NDE 检测专家们会为新的超声检测场景的开发提供数据（包括从实际反射体中得到的波形库）和工具。尽管波形和工具使用起来相对比较容易，但是训练和测试中所使用的场景的开发需要超声 NDE 技术方面的专家才能够完成。

11.4.2　应用情况

对于核工业的超声检测而言，按照 ASME XI 卷《核动力设备在役检查规则》要求，核电站无损检测人员每年至少要有 8h 的核电站超声检测训练，以保证检测人员一定的熟练程度和相关的检测技能。美国核管理委员会（NRC）于 1998 年 11

月颁布的标准中也包括类似的要求，它规定核电站超声检测人员每 6 个月就必须要进行 8h 的超声实践，以保持检测水平和经验。

因而，VNDE 软件主要应用在核工业中操作人员的超声检测培训方面，用以增加现场检测人员的锻炼时间，并提高他们的检测能力。VNDE 软件可以为检测人员的特定工作构建具体的环境，以方便现场操作人员提前对工作进行准备。

VNDE 软件在美国威斯康星州的 Point Beach 核电站得到了实际应用。通过该软件的使用，Point Beach 核电站避免了购买昂贵的试块，在每个 10 年期间可以节省的项目开支是 138000～208000 美元。

11.5 超声仿真的其他软件

11.5.1 UTSIM[22,23]

UTSIM 是美国爱荷华州立大学（Iowa State University）的无损评价中心（Center for Nondestructive Evaluation）开发的一套软件，界面如图 11.19 所示。此软件集成了 CAD 模型和声束模型，其中的 CAD 模型主要用来生成被检测的工件。声束模型能够精确计算三维空间内，弯曲界面或者平界面下的聚焦或者平面波束所形成的超声场。目前，UTSIM 只能计算各向同性介质内的超声场。

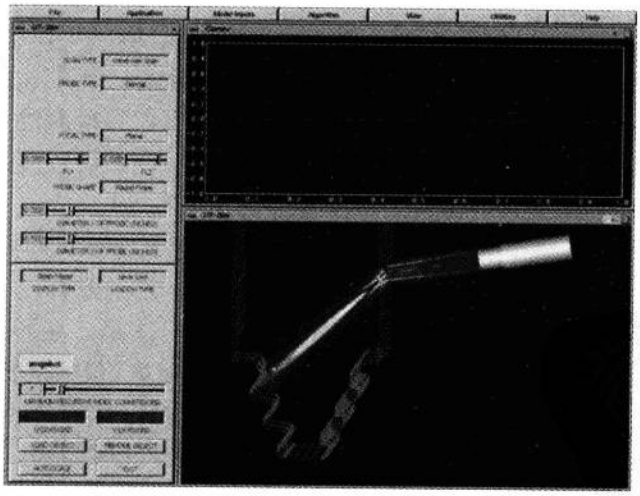


图 11.19 UTSIM 软件计算过程中的某一窗口

UTSIM 可以模拟脉冲-回波或串列模式下，任意形状、角度和尺寸的接触式探头。晶片的形状可以是矩形或者椭圆形。

由于 UTSIM 中内置有 CAD 模型，因而它可以模拟复杂外形的工件。但是目前，它所能计算的工件材料必须是各向同性的。

UTSIM 可以模拟多种类型的缺陷，包括比较小的平面缺陷等。

UTSIM 软件主要用于，预测复杂外形工件内的超声场；计算工件内的缺陷信号；优化检测中探头的位置以及培训等方面。

11.5.2　Wave3000 Pro[24]

Wave3000 Pro 是美国 CyberLogic 公司开发的一套超声仿真软件。该软件是一个单独的用于超声场计算的软件包。

Wave3000 Pro 软件是基于三维的黏弹性波束方程，并采用了有限差分的方法进行求解。它可以模拟外形复杂的工件，并能够计算纵波、横波在固体和液体中的传播过程，包括其中的模式转换，软件材料参数设置界面如图 11.20 所示。

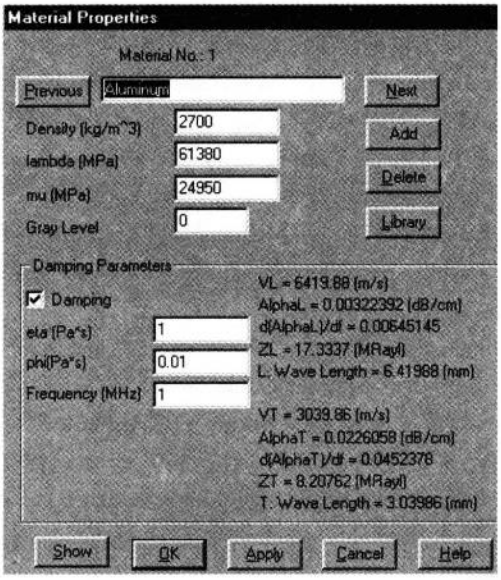


图 11.20　Wave3000 Pro 中的材料特性定义窗口

Wave3000 Pro 软件主要应用在以下几个方面：

(1) 无损检测和材料评价。

(2) 超声成像和生物医学中的组织表征。

(3) 探头设计。

(4) 地球物理学。

(5) 理论和应用研究。

(6) 学术/教育。

参 考 文 献

[1] 单洪彬,李明,陈怀东. 国外超声检测仿真软件的研究进展[J]. 无损检测, 2008, 30(7): 1-6.

[2] The French Atomic Energy Commission. CIVA8 discription [EB/OL]. [2010-02-01]. http: // www-civa. cea. fr/home/liblocal/docs/Description/CIVA8%20Description _ US _ V4. pdf.

[3] Haïat G, Calmon P, Lasserre F. Application of ultrasonic modeling to the positioning of defects in a cladded component[C]. Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, 2004, 23:103-109.

[4] Haiat G, Lhémery A, Calmon P, et al. A model-based inverse method for positioning scatterers in a cladded component inspected by ultrasonic waves[J]. Ultrasonics, 2005, 43 (8):619-628.

[5] Calmon P, Lhémery A, Lecoeur-Taïbi I, et al. Models for the computation of ultrasonic fields and their interaction with defects in realistic NDT configurations[J]. Nuclear Engineering and Design, 1998, 180(3):271-783.

[6] Lhe mery A, Calmon P, Lecour-Taïbi I, et al. Modeling tools for ultrasonic inspection of welds[J]. NDT&E International, 2000, 33(7):499-513.

[7] Mahaut S, Roy O, Chatillon S, et al. Modeling and application of phased array techniques dedicated to complex geometry inspection[C]. Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, 2003,22:894-901.

[8] Chatillon S, Cattiaux G, Serre M, et al. An ultrasonic system for the inspection of components with irregular geometry using a flexible phased array contact transducer and related processing algorithms[C]. Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, 2000, 19:1095-1102.

[9] Roy O, Mahaut S, Casula O. Control of the ultrasonic beam transmitted through an irregular profile using a smart flexible transducer: Modelling and application[J]. Ultrasonics, 2002, 40(1-8):243-246.

[10] Lonné S, Lhémery A, Thévenot F. A simulation study to explain the variability of ultrasonic attenuation measurement in RTM composites[C]. Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, 2004, 23:898-905.

[11] Lonné S, Lhémery A, Calmon P, et al. Modeling of ultrasonic attenuation in unidirectional fiber reinforced composites combining multiple-scattering and viscoelastic losses [C]. Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, 2004, 23: 875-882.

[12] UTEX Scientific Instruments Inc. Imagine3D ultrasonic simulation[EB/OL]. [2010-02-01]. http:// www. utex. com/Products/Simulation/I3d/Imagine3D. htm.

[13] UTEX Scientific Instruments Inc. What is new in Version 2. 5[EB/OL]. [2010-02-01].

http://www. utex. com/Products/Simulation/I3d/I3dnewv25. htm.

[14] UTEX Scientific Instruments Inc. User's manual-Imagine3D ultrasonic simulation software version2. 5[EB/OL]. [2010-02-01]. http://main. utex. com/webdb/whitepapers. nsf/23e5e39594c064ee852564ae004fa010/68a0d8fea56e955085256da900541fc1/$file/i3d-manual 2. 5. pdf.

[15] Cziraki D, Ginzel R. Ultrasonic modeling & sound visualization[J/OL]. [2010-02-01]. http://www. ndt. net/article/v08n11/ginzel/ginzel. htm.

[16] Wirdelius H, Blomquist A. The application of mathematical modeling of ultrasonic NDT in the qualification process[J/OL]. [2010-02-01]. http://www. ndt. net/article /ecndt98/ reliabil/ 323/323. htm.

[17] Wirdelius H. The simSUNDT software and validation of the grain noise model[C]. Proceedings of the World Congress on Ultrasonics, 2003:101-104.

[18] Chalmers Lindholmen Hogskola ab. User guide to simSUNDT [EB/OL]. [2010-02-01]. http://www. chl. chalmers. se /main /scendt /projekt/ simSUNDT(1. 1)-man. PDF.

[19] Nikalasson J, Boström A, Wirdelius H. Benchmarking-A validation of UTDefect [EB/OL]. [2010-02-01]. http://www. ski. se/dynamaster/file_archive/061101/e85084af5ff8e4f4ccd0b542d47147fe/SKI%20Rapport%202006_30%20Web. pdf.

[20] Harris D H, Spanner J. Virtual NDE operator training and qualification [EB/OL]. [2010-02-01]. http://www. ndt. net/article/v04n10/jspanner/jspanner. htm.

[21] Jensen W. Point beach nuclear plant substantially reduces annual training costs by implementing virtual NDE operator training and evaluation system for ultrasonic operators[EB/OL]. [2010-02-01]. http://my. epri. com/portal/server. pt? space = communitypage &cached=true&parentname=objMgr&parentid=2&control=setcommunity& communityid=221&pag eidquerycomId=0.

[22] Ultrasonic simulation-UTSIM. [2010-02-01]. http://www. ndt-ed. org/EducationResources/CommunityCollege/Ultrasonics/CalibrationMeth/utsim. htm.

[23] Garton M. Refining automated ultrasonic inspections with simulation models [EB/OL]. [2010-02-01]. http:// www. ndt. net/article/garton/garton. htm#chapter1.

[24] CyberLogic, Inc. Ware3000 software for 3D ultrasonic simulation [EB/OL]. [2010-02-01]. http://www. cyberlogic. org/wave3000. html.

第 12 章　基于实时计算的超声检测虚拟现实系统

锅炉压力容器设备的超声检测因其结构复杂或者材质变化导致检测工艺制定与信号识别困难，结果的可靠性主要依赖于检测人员的实际经验。为此，许多国家都已经开发出较成熟的超声仿真软件，如 CIVA、V-NDT、UT-Sim、UT-CAS 等。这些软件有的用于超声检测人员培训，有的用于超声检测工艺设计和信号分析。

为了实现更真实的超声检测仿真，有必要基于已建立的声场计算模型和缺陷回波模型，开发 3D 动态交互式超声检测虚拟现实系统，实现在虚拟现实的环境中用鼠标控制探头在工件表面的平移、旋转等扫查动作；同时系统自动读取工件、探头及自定义缺陷的参数，实时计算探头所在位置对应的 A 显信号，并显示在虚拟仪器的示波屏上，可帮助检测人员制定探伤工艺、分析检测信号，针对特殊结构接头进行检测培训，具有重要的实用和推广价值。

12.1　系统的框架与结构

超声检测虚拟现实系统按其构成可分为虚拟现实场景模块和实时计算模块，按其功能可分为培训模块和工业应用模块。系统总体框架如图 12.1 所示[1]。

虚拟现实场景模块主要是一个动态交互式的超声检测虚拟现实场景，该虚拟现实场景能逼真地呈现所导入的各种试块、工件和探头的三维模型，允许检测人员利用鼠标控制探头模型在探测面上进行扫查。实时计算模块的核心是发射声场和缺陷回波模型，该模块能调用从虚拟现实场景模块中读取的工件、探头及缺陷等参数实现探头接收到信号的计算。最终利用虚拟仪器软件将两个模块整合并构建系统界面。

培训模块包含了一个常规工件和试块的模型库以及一个已计算好的波形库，以便于帮助检测人员提高对超声检测过程的理解和帮助检测人员熟悉检测仪器的操作流程。工业应用模块允许检测人员自定义工件探头缺陷等参数，以便于模拟实际检测环境，并能进行实时计算，帮助检测人员分析实际检测信号，制定检测工艺。

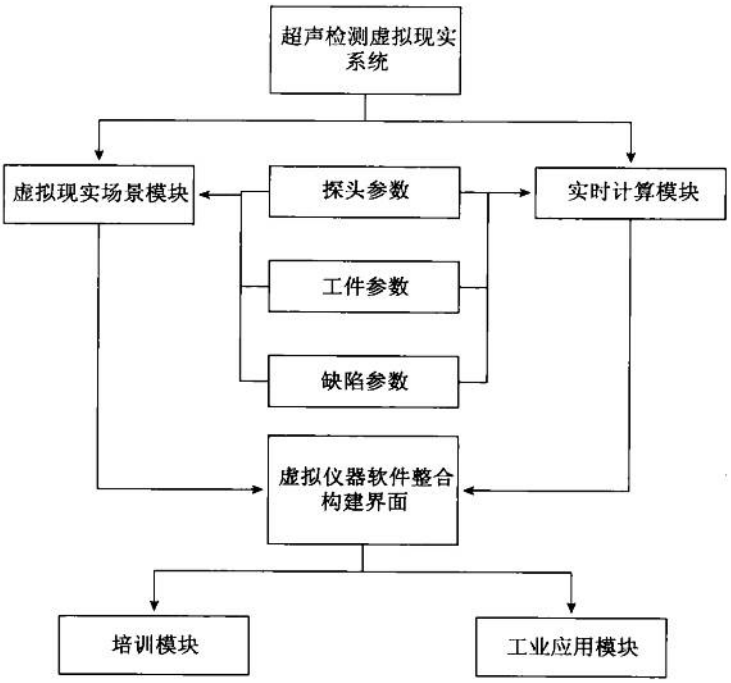


图 12.1　超声检测虚拟现实系统框架图

12.2　虚拟现实场景模块

虚拟现实模块决定了系统所能实现的功能。该模块的实现所用到的工具是三维建模软件和 VRML 编辑软件。首先，利用三维建模软件强大的三维建模功能创建出所需的工件与探头模型。然后，将建好的模型导入到 VRML 编辑软件中，并对其源代码做修改，保存修改后的源代码。将工件和探头模型作为整体节点，在虚拟现实开发软件中进行编程实现探头在工件表面的移动和转动[2]。本系统通过修改 VRML 几何模型中的外观属性节点参数到达透明化工件的效果，方便检测人员观察工件结构。该模块还允许检测人员自定义工件和工件中缺陷，该功能是通过虚拟仪器工具所提供的用于交互控制的调用节点实现的。

12.2.1　虚拟场景构建

为了让用户切身体会到超声探伤操作过程，本系统需要实现通过鼠标控制探头移动。实现探头移动和旋转的关键是：改变探头模型在三维虚拟空间的坐标值

和旋转角度。

1. 鼠标控制探头做平面运动

当超声检测对象为钢板、锻件或板对接焊缝时，探测面为平面，耦合方式为直接接触法，探头在平面上移动进行检测。因此该虚拟现实场景需要实现利用鼠标控制探头做平面运动。

直探头的声波入射方向是与探测面垂直的，以探测面法线方向为旋转轴来旋转直探头不会影响超声波的传播方向，也不会影响探伤结果，因此对于直探头而言，只需实现用鼠标控制其在探测面上的平移。在实现这一虚拟现实场景的过程中，主要利用了 Transform 节点和 Plane sensor 节点进行编程。Plane sensor 节点包含 enabled、auto offset、offset、max position、min position、isactive、trackpoint_changed、translation_changed 等七个域。设置 max position、min position 的域值来限制探头模型的移动范围，其他域的值都设为默认值。Translation_changed 表示在进行鼠标拖动时，用户的鼠标在 Oxy 平面上的暂时坐标，将鼠标的坐标通过 Route 传递给 Transform 节点中的 Translation 域，即可以实现直探头模型随鼠标在 Oxy 平面移动。当直探头不垂直于 Oxy 平面时，则需要通过编写新的 Transform 节点创建新的坐标系，新坐标系要相对于原坐标系旋转某一特定角度使直探头垂直于 Oxy 平面。

斜探头的声波入射方向是与探测面成一定角度的，以探测面法线方向为旋转轴旋转探头会改变超声波的传播路径从而影响探测结果。因此，对于斜探头而言，不仅需要实现用鼠标拖动其平移，而且需实现用鼠标操控其旋转。在实现这一虚拟现实场景的过程中，主要利用了 Transform 节点、Plane sensor 节点和 Cylinder sensor 节点进行编程。Cylinder sensor 节点包括 enabled、autooffset、offset、maxangle、minangle、diskangle、isactive、trackpoint_changed、rotation_changed 等九个域。设置 maxangle、minangle 的域值来限定斜探头旋转角度，其他域值设为默认值。用鼠标拖曳空间物体时，rotation_changed 的值代表虚拟圆柱体的旋转值。通过 Route 将 Plane sensor 节点和 Cylinder sensor 节点与 Transform 节点建立关联。实现鼠标控制探头做平面运动的程序逻辑如图 12.2。

利用 Plane sensor 节点和 Transform 节点构建的可以用鼠标操控直探头在 CSK-IA 试块顶面上移动的虚拟现实场景如图 12.3，用鼠标控制斜探头在 CSK-IA 试块上移动和旋转的虚拟现实场景如图 12.4。

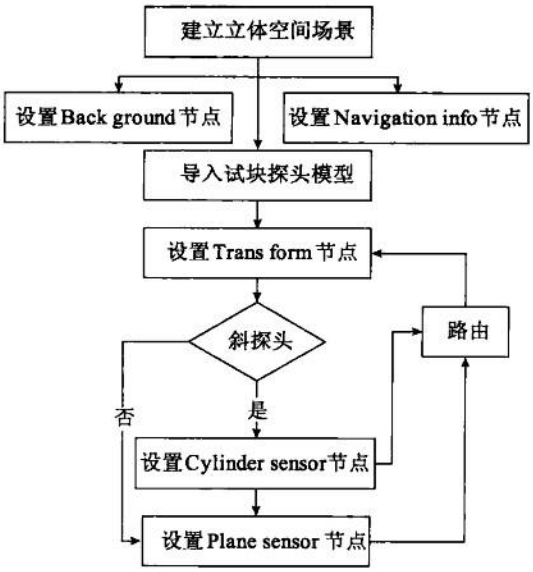


图 12.2　探头做平面运动的程序逻辑图

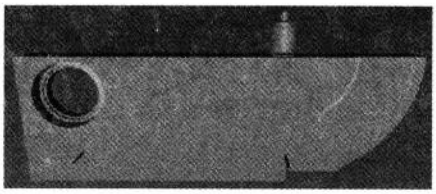


图 12.3　直探头在 CSK-IA 试块顶面上移动的虚拟现实场景

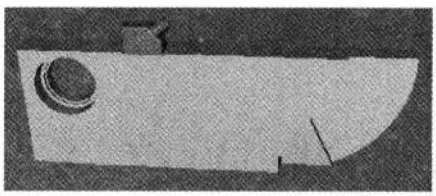


图 12.4　斜探头在 CSK-IA 试块平面上移动的虚拟现实场景

2. 鼠标控制探头沿曲面运动

当超声检测对象为管道环焊缝或管座式焊缝时，探测面为圆周面，探头需沿曲面移动进行探伤。Plane sensor 节点只能实现鼠标拖拽探头在平面上移动，经研究发现通过 Script 脚本节点编程可以实现探头在曲面上运动。在 Script 脚本节点中，可以定义一些域、入事件和出事件等来描述所需实现的功能。

Script 脚本节点允许用户自定义制作检测器和插补器来实现复杂的动态交互操作。为了实现探头沿曲面移动，首先要在脚本节点中编写曲面轨迹的几何方程式，然后将该方程式的值赋给 Plane sensor 节点。该方法存在一个弊病，对于不能用方程式表达的曲面，无法实现探头沿其表面移动。该方法可以很好地实现探头沿管道曲面上的移动。实现鼠标控制探头做曲面运动的程序逻辑如图 12.5 所示。

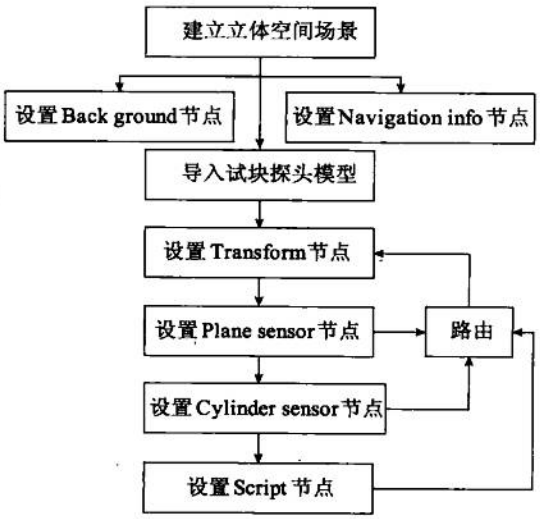


图 12.5 实现鼠标控制探头做曲面运动的程序逻辑图

用鼠标控制斜探头在小径管曲面上移动来探测管座角焊缝的虚拟现实场景如图 12.6 所示。

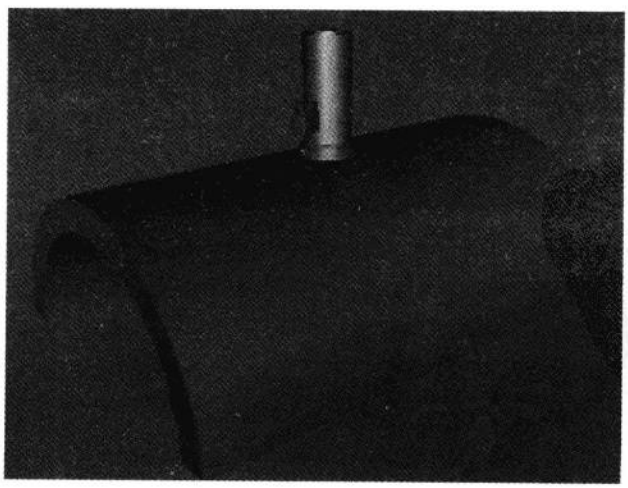


图 12.6 斜探头在管道曲面上移动的虚拟现实场景

12.2.2　虚拟超声仪构建

超声探伤仪是超声检测技术中最重要的设备，超声波探伤仪的种类很多，按照显示方式可分为 A 型显示、B 型显示、C 型显示；按照发射波性质可分为脉冲式、连续式；按照声波通道可分为单通道、多通道。标准 JB4730.3—2005 规定了承压设备采用 A 型脉冲反射式超声波探伤仪检测工件缺陷的方法和质量分级要求。因此，本系统根据 CTS-22 型和 HS510 型超声波探伤仪构建出具有与其功能相同的虚拟 A 型脉冲反射式超声波模拟探伤仪和数字探伤仪。

CTS-22 型超声波探伤仪包括衰减器粗调、衰减器微调、增益、扫描量程、扫描微调、脉冲移位、聚焦、发射强度、抑制等九个外调旋钮。其中衰减器粗调、衰减器微调和增益等旋钮用于调节仪器的探伤灵敏度，控制波幅高度；扫描量程、扫描微调和脉冲移位等旋钮用于调节仪器的探测范围与时基线比例，控制波形位置；聚焦旋钮用于调节时基线清晰的程度；发射强度旋钮用于调节仪器的工作方式；抑制旋钮主要是用于抑制杂波，提高信噪比。因此，搭建虚拟 A 型脉冲反射式超声波模拟探伤仪的主要工作是创建具有调节探伤灵敏度、探伤范围和时基线清晰度功能的旋钮。LabVIEW 提供了丰富多样数值控件、布尔控件和图表控件。在程序前面板上放置数值控件作为虚拟模拟探伤仪的控制旋钮，放置波形图表控件作为虚拟模拟探伤仪的示波器。控制波幅高度的数值控件旋钮通过混合运算函数与波形信号数组关联起来，实现当衰减器值增加 6dB 或增益减小 6dB，波幅高度降低一半。利用波形图表控件的 xscale. maximum 节点实现扫描范围旋钮的功能；利用波形图表控件的 xscale. Rngstart 节点实现脉冲移位的功能；利用波形图表控件的 plot. linewidth 节点实现聚焦的功能。构建出来的虚拟模拟探伤仪的控制面板如图 12.7 所示。

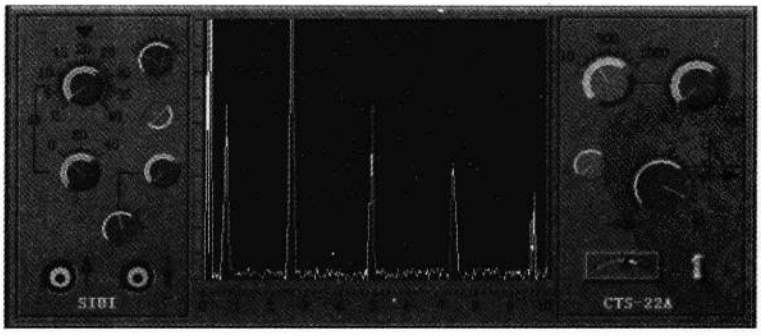


图 12.7　虚拟 A 型脉冲反射式超声波模拟探伤仪

HS510 数字探伤仪相比于 CTS-22 模拟仪，具有更丰富的功能和更多的控制按钮，主要包括：灵敏度控制键、脉冲平移键、检测范围调节键、闸门控制键、峰值记忆键和方向键。为了使虚拟数字仪具有和真实仪器一样的功能，主要利用条件结构和反馈节点进行编程，建立各按钮的逻辑关系，实现衰减调节、闸门调节、起始偏零、扫描范围调节、波峰记忆等功能。利用条件结构的嵌套使用实现闸门调节功能，能够改变闸门位置和宽度，并能得到闸门内最高波幅的数值大小。利用数组最大值与最小值函数实现波峰记忆功能，闸门内总是波幅高的波取代波幅低的波。利用反馈节点实现当仪器状态不发生调整时，保证仪器当前状态。方向键具有调节不同类型数据大小的功能，当仪器点击不同的功能按键则进入相应的调整状态。每个按键都对应着现实相应功能的程序，这些程序放置在条件结构里，单击一个按键则进入相应的事件结构中执行相应的程序，实现相应的功能。构建出来的虚拟数字探伤仪的控制面板如图 12.8 所示。

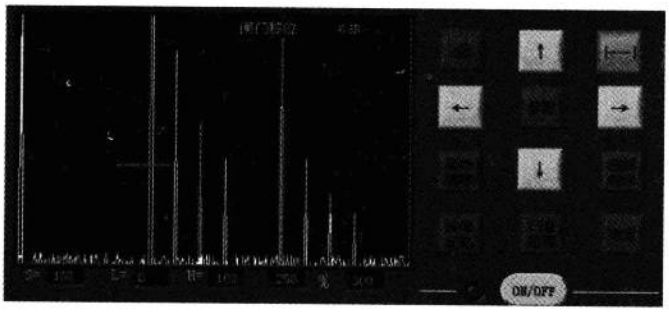


图 12.8 虚拟 A 型脉冲反射式超声波数字探伤仪

12.3 实时计算模块

超声检测虚拟现实系统的核心在其计算模块上，该模块最终决定了整个系统的运行速度和准确度。本系统的计算模块是以半解析法为核心，可完成发射声场计算和缺陷回波计算[3]。

根据超声检测的三个主要过程，即超声波从探头发射、在工件传播时与缺陷作用、产生的缺陷回波再由探头接收，UT-CAS 理论模型分三步建立：①探头发射声场计算；②发射声场与缺陷相互作用计算；③缺陷回波声场计算。

12.3.1 探头发射声场计算

探头发射声场计算模型主要用来计算缺陷表面的声场分布，为研究声场与缺陷的相互作用奠定基础。

考虑探头在半无限大空间中的发射声场时，假设晶片由一系列的点源组成，每个点源向外发射单一频率的球面波 $\varphi(M,t)$，由瑞利积分[2]，空间中任意一点 M 的声场表示成各点源在该点产生的声压的叠加：

$$\varphi(M,t) = \iint_{Tr} \frac{\varphi(r_T, t-r/c)}{2\pi r} \mathrm{d}S \quad , \tag{12.3.1}$$

式中，r_T 为点源位置；r 为点源 r_T 到计算点 M 的距离；$\mathrm{d}S$ 为点源面积；Tr 表示在探头面积上的积分。

在考虑工件中的声场时，需要考虑声束在工件和探头界面处透射和传播过程中的能量衰减，声束在界面处的能量损失可以用折射系数 Tra 来表示，Tra 可以通过应用界面处应力应变的连续性条件建立的方程组求得；声束在传播过程中的能量损失可以用传播衰减因子 DF[4] 来表示，DF 通过 Pencil 法计算。当工件表面为平面、工件为各向同性介质时，DF 的表达式如下：

$$\mathrm{DF}^2(r_T) = \left(R_f + R_a \frac{c_a}{c_f}\right)\left(R_f + R_a \frac{c_a \cos^2\theta_f}{c_f \cos^2\theta_a}\right) \tag{12.3.2}$$

式中，R_a 和 R_f 分别为在点源到工件表面和工件的声程；θ_a 和 θ_f 分别为入射角和折射角；r_T 为计算点的位置；c_f 为耦合介质中的声速；c_a 为工件中的声速。工件中的声场可以用修正后的瑞利积分式表示：

$$\varphi(M,t) = \iint_{Tr} \frac{\mathrm{Tra} \cdot \varphi(r_T, t-R_f/c_f - R_a/c_a)}{2\pi \cdot \mathrm{DF}} \mathrm{d}S \tag{12.3.3}$$

当考虑表面为曲界面、材质为各向异性介质或多层介质的工件的声场时，只需要将相应的传播衰减因子 DF 带入式(12.3.3)即可。

由于采用点源叠加方法，本模型可以模拟任意探头的发生声场，如聚焦探头、双晶探头、相控阵探头等；可以模拟声场在任意复杂界面处的反射和透射，在任意介质中的传播，如各向异性和非均质介质等。

12.3.2　声场与缺陷相互作用

目前常见缺陷主要归结为两大类：体积型缺陷，包括气孔、夹渣、未焊透等；面缺陷，包括裂纹、未熔合等。为了提高模拟精度和速度，基于不同的近似理论建模实现相应的声场与缺陷作用模拟。

(1)裂纹回波模型，基于基尔霍夫近似的高频近似模型，用于处理各种体积类缺陷(不含夹渣)和裂纹类缺陷。依据基尔霍夫近似理论，散射体任意点处的表面近似地由该点切平面上的平面反射体替代，表面的任意一点都产生平面界面的反射，该点的总场强由过这一点的切平面反射特性决定。基尔霍夫近似忽略了表示沿缺陷表面传播的瑞利波的二次衍射项，从而以衍射系数的形式给出散射场远场

振幅和入射场的关系式：

$$\phi^{\mathrm{diff}}(r',\omega)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}}{r'}B_{\alpha\beta}(\gamma,\theta)\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx(\sin\gamma-\sin\theta)}\,\mathrm{dS} \tag{12.3.4}$$

式中，r'为缺陷离散点的位置；$B_{\alpha\beta}(\gamma,\theta)$为衍射系数，$\alpha$、$\beta$分别为入射波和衍射波的波形，对不同的波形转换，衍射系数也不同；γ和θ分别为声束在缺陷上的入射角和衍射方向的观察角。本模型的算法是首先将缺陷离散，然后单独计算每个缺陷点所产生的衍射回波，最后将所有离散点产生的回波叠加得到缺陷回波。然而基尔霍夫近似忽略了二次衍射项，不能计算沿裂纹表面传播的瑞利波产生的衍射回波。

(2)边缘回波模型，基于几何衍射理论(GTD)的高频近似模型，作为裂纹回波模型的补充，用于处理裂纹尖端衍射。当主声束无法由探头接收时，接收到的缺陷信号主要是由裂纹两个尖端产生的衍射回波，入射声束首先在近端衍射产生衍射回波和沿裂纹表面传播的瑞利波，瑞利波在远端再次衍射产生远端衍射回波。GTD理论基本思想是把均匀平面波在半无限楔形导体边缘上的衍射严格解的渐近式，应用于从点源发出的球面波或线源发出的柱面波在弧形导体边缘上的衍射，并把它作为该问题的0阶近似解，以衍射系数的形式给出裂纹尖端衍射波振幅和入射场的关系式：

$$\phi^{\mathrm{diff}}(r,\omega)=\phi^{\mathrm{inc}}(r',\omega)H(\omega)D_{\beta}^{\alpha}(\theta,\phi_{\alpha},\theta_{\alpha})\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{\beta}r_{\beta}}}{\sqrt{r_{\beta}}}d_{\beta}^{\alpha} \tag{12.3.5}$$

式中，r'为缺陷离散点的位置；$H(\omega)$为转换函数；$D_{\beta}^{\alpha}(\theta,\phi_{\alpha},\theta_{\alpha})$为衍射系数；$\theta$、$\phi_{\alpha}$、$\theta_{\alpha}$分布为观察角、声束入射角和入射面倾角，$\alpha$、$\beta$分别为入射波和衍射波的波形。本模型是离散裂纹边缘，单独计算表面各点衍射回波，最后将各点衍射回波叠加得到缺陷回波。

(3)夹渣回波模型，前面两个模型都是基于高频近似，适用于尺寸较大的体积型和面积型缺陷，而对于尺寸小于1mm的夹渣缺陷，用上述两种方法处理误差较大，引入基于低频近似的波恩近似理论来建立声场与缺陷相互作用模型可以准确模拟夹渣类缺陷回波[11]。本模型算法用量子力学中的积分方程代替了传统的偏微分方程来描述超声场散射问题，用精确迭代法求解积分方程，得到渐进的波恩级数解。波恩近似是取无限级数的第一项作为近似解，即用入射场取代散射体内的未知的位移场，最终得到纵波和横波散射场远场表达式：

$$\phi_i^{\mathrm{diff}}=A_i\frac{\exp(\mathrm{i}k_{\mathrm{L}}^{\mathrm{I}}r)}{r}+B_i\frac{\exp(k_{\mathrm{T}}^{\mathrm{I}})}{r} \tag{12.3.6}$$

式中，A_i和B_i分别代表衍射后的纵波和横波振幅；$k_{\mathrm{L}}^{\mathrm{I}}$为入射纵波波矢；$k_{\mathrm{T}}^{\mathrm{I}}$为入射横波波矢。对于纵波入射：

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \frac{k_{\mathrm{L}}^{\mathrm{S}2}}{4\pi}\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\cos\theta - \frac{k_{\mathrm{L}}^{\mathrm{I}}}{k_{\mathrm{L}}^{\mathrm{S}}}\frac{\delta\lambda + 2\delta\mu\cos^2\theta}{\lambda + 2\mu}\right)S(k_{\mathrm{L}}^{\mathrm{I}}, k_{\mathrm{L}}^{\mathrm{S}})\hat{r}_i \\ B_i &= \frac{k_{\mathrm{T}}^{\mathrm{S}2}}{4\pi}\left(\frac{k_{\mathrm{L}}^{\mathrm{I}}\delta\mu}{k_{\mathrm{T}}^{\mathrm{S}}\mu}\sin 2\theta - \frac{\delta\rho}{\rho}\right)S(k_{\mathrm{L}}^{\mathrm{I}}, k_{\mathrm{T}}^{\mathrm{S}})\hat{\theta}_i \end{aligned}\right\} \tag{12.3.7}$$

式中，$S(k_{\mathrm{L}}^{\mathrm{I}}, k_{\mathrm{L}}^{\mathrm{S}})$为形状因子；$k_{\mathrm{L}}^{\mathrm{S}}$ 和 $k_{\mathrm{T}}^{\mathrm{S}}$ 分别为散射纵波波矢和散射横波波矢；λ、μ、ρ 为主介质弹性常数和密度；$\delta\lambda$、$\delta\mu$、$\delta\rho$ 为介质、缺陷密度和弹性常数的差。

12.3.3　回波声场计算

在计算了声场与缺陷相互作用之后，探头接收到回波主要依据 Auld 互易原则计算。

缺陷上离散点 M 的入射场由前面建立的声场计算模型来计算，将表达式在空间和时间上分开，近似为

$$\varphi(M,t) = q(M)S(t - \Delta T(M)) \tag{12.3.8}$$

式中，$q(M)$为缺陷上离散点 M 的振幅衰减；$S(t-\Delta T(M))$为相位；$\Delta T(M)$为声束从探头到缺陷点 M 的传播时间。依据互易原则，波从缺陷传播到探头的响应与其从探头传播到缺陷的响应相同，则探头接收到的回波：

$$\varphi_{\mathrm{r}}(M,t) = q_{\mathrm{e}}(M)q_{\mathrm{r}}(M)S(t - \Delta T(M) - \Delta T'(M)) \tag{12.3.9}$$

式中，$q_{\mathrm{e}}(M)$和 $q_{\mathrm{r}}(M)$分别为发射和接收过程的振幅衰减；$T'(M)$为声束从缺陷点 M 到探头的传播时间。最后考虑衍射系数 $B(M)$和缺陷离散点衍射回波叠加，缺陷回波的表达式为

$$\Phi^{\mathrm{diff}}(r,t) = \int_{\mathrm{defect}} B(M)q_{\mathrm{e}}(M)q_{\mathrm{r}}(M)S(t - \Delta T(M) - \Delta T'(M))\mathrm{d}S_{\mathrm{D}} \tag{12.3.10}$$

式中，S_{D} 为缺陷离散单元的面积。实时计算模块调用系统读取到的工件、探头及缺陷的数据，选择相应的计算模型可以实时计算得到对应参数下的探头接收信号。

12.4　系统的应用

该系统的动态交互的虚拟现实场景能模拟实际检测操作过程；实时计算模块能计算任意探头在各种参数条件下的缺陷回波。检测人员可以在系统中进行钢板、钢锻件、板对接、管座角焊缝、T 型对接以及管对接焊接接头超声探伤操作训练；工业应用模块帮助检测人员分析检测信号，制定检测工艺。本节首先以 T 型接头焊缝超声检测为例，介绍本系统的应用培训功能和信号分析功能，然后以奥氏体焊缝检测为例，介绍了本系统的检测工艺能力验证功能。

12.4.1　系统培训功能[1]

培训模块系统运行界面如图 12.9 所示。左上角区域为仪器操作界面，右上角

区域为系统控制界面，左下角区域为交互式操作界面，右下角为数据显示区域。

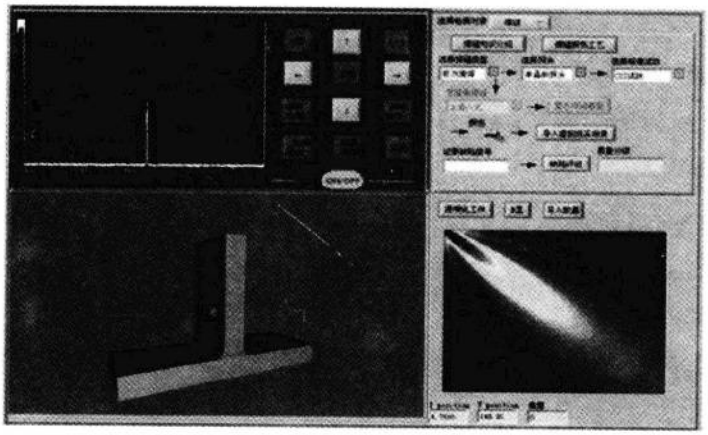


图 12.9 虚拟现实系统界面

在仪器操作界面，检测人员可以按照实际的仪器操作流程进行控制操作仪器。在系统控制界面中系统要求检测人员手动选择检测对象，对于不同的检测对象，系统给出了相应的检测工艺制定模块，帮助检测人员根据实际情况制定相应的检查工艺、工件中缺陷的定义，工件的选择、自定义及探头的选择以及工件的透明化设置也都是在系统控制界面中完成的。在交互式操作界面中，检测人员可以使用鼠标控制探头在被检工件上的扫查，同时系统的计算模块可以根据读取的数据进行实时计算得到相应的探头接收信号。在数据显示界面，可以直接查询到探头相对于工件的空间位置和旋转角度等参数，也可根据需要显示工件的截面图。

12.4.2 回波分析[1]

T 型接头腹板板厚为 38mm，翼板板厚为 60mm，焊缝坡口如图 12.9 所示，宽度为 20mm。焊缝腹板侧存在未熔合缺陷，缺陷自身高度为 4mm，有一 $\Phi 3 \times 30$mm 的横孔位于焊缝中心。K1 探头频率为 2.5MHz、晶片尺寸为 10mm × 12mm。首先，利用三维建模软件建立板对接焊缝实体模型，并保存为“.wrl”格式，导入三维场景。然后利用计算模块计算出各个位置的回波 A 显信号，并导入系统。

将各种影响因素用相应参数表示，输入系统模型进行计算，得到数据和检测结果，可以分析结果显示的各种信号的来源以及各种因素对信号的影响，计算流程如图 12.10 所示。图 12.11 给出了超声检测所产生的回波信号，图 12.11(a)和图 12.11(b)分别为未熔合缺陷最大回波时和横孔最大回波时的射频信号图，图

12.11(c)和图 12.11(d)分别为存在未熔合缺陷和不存在未熔合缺陷时，计算得到的 B 扫描图，将有未熔合和没有未熔合时的 B 扫描图对比可以发现，信号 2 为未熔合回波信号，信号 1 为横孔回波信号。若存在结构回波、变形波等复杂情况时，通过模拟结果分析，可以快速准确识别和解释缺陷回波信号。

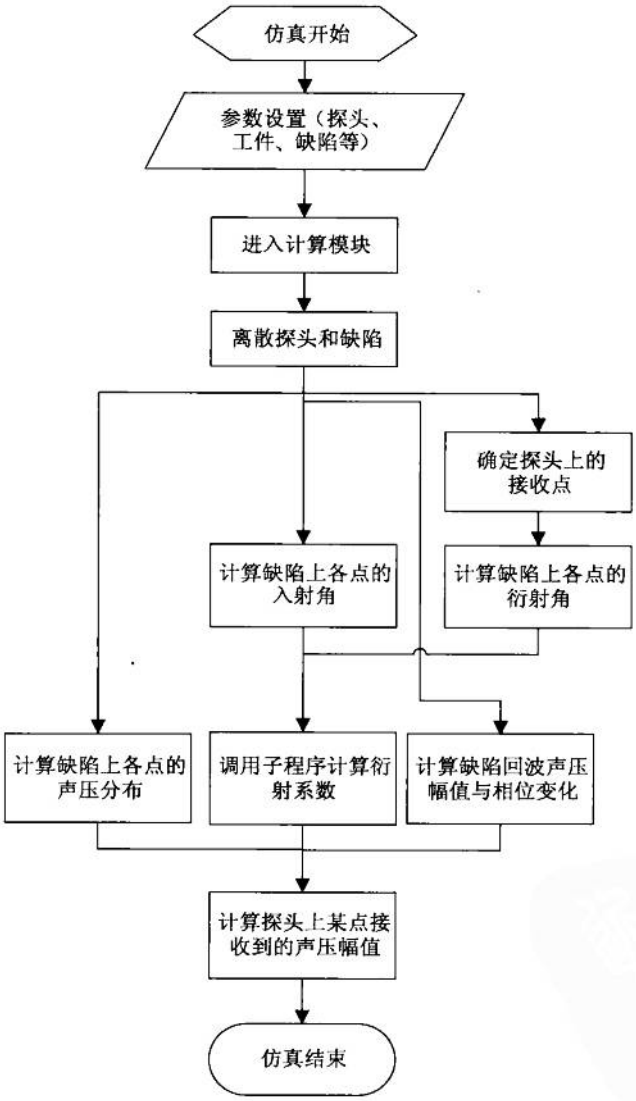


图 12.10　系统计算流程图

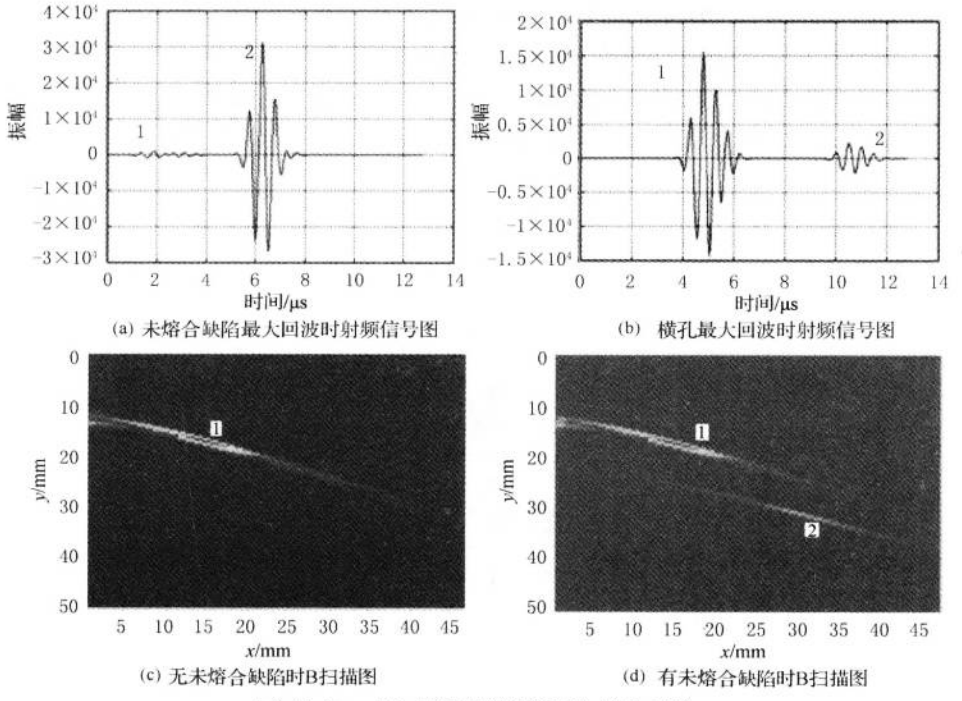


图 12.11 板对接焊缝根部裂纹缺陷回波

12.4.3 检测工艺验证[4]

以奥氏体焊缝检测为例，介绍本系统的检测工艺验证功能。焊缝检测模拟首先要获得焊缝参数，对于如图 12.12 所示的奥氏体焊缝，其表面几何形状复杂，微

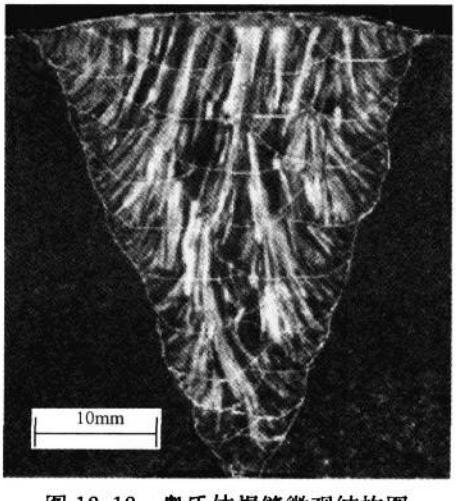


图 12.12 奥氏体焊缝微观结构图

观组织为非均质和各向异性，获得参数较困难。表面几何形状参数获得的方法是用一个在焊缝表面附近的小聚焦探头扫查焊缝表面，形成 B 扫描图形，再用图像处理工具分割 B 扫描图形，得到焊缝表面的真实几何形状参数；焊缝非均质和各向异性结构的简化方法是通过观测焊缝微观组织中的枝晶取向和分布，借助于图像处理工具，将非均质焊缝近似为几个均质区域，每个区域为具有独立晶体学取向的各向异性晶粒组织，每个区域的弹性常数通过对其单晶进行横波和纵波声速测量计算得到，最后得到的奥氏体焊缝模型如图 12.13 所示。

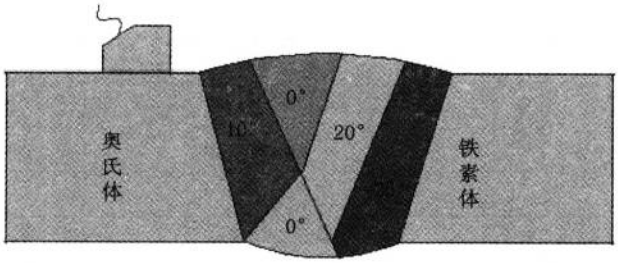
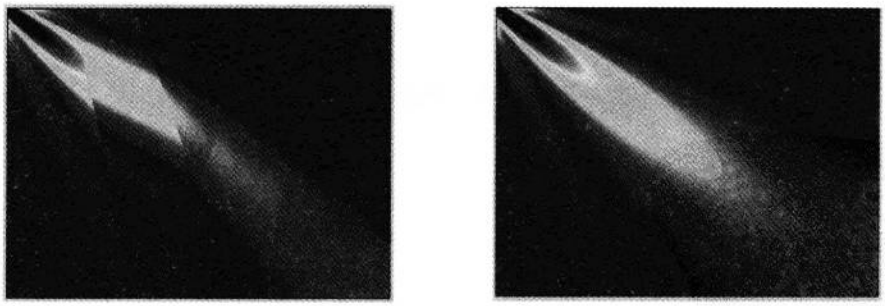


图 12.13　奥氏体焊缝超声检测模型

焊缝结构复杂，而且核电站自动化检测的扫查空间有限，制定的工艺要保证检测效率和可靠性。运用声场分析工具，可以观察声场在工件中的覆盖情况，验证检测工艺。图 12.14(a)和图 12.14(b)分别为折射角为 45°探头所发射的声束在非均质各向异性焊缝和均质各向同性介质中的传播路径，可以看出，声束在非均质各向异性介质中发生了严重的偏转和扭曲。通过声束路径的可视化，可以很容易判定在此检测工艺下声束是否能够覆盖缺陷位置。

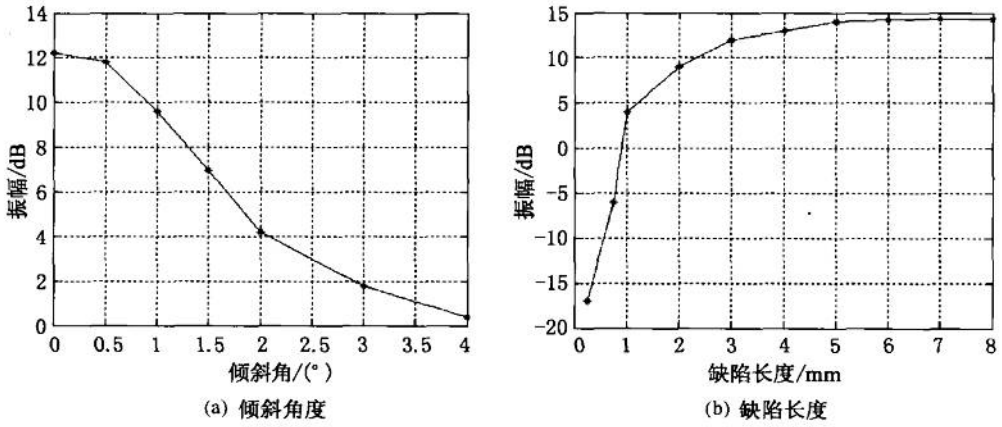


(a) 非均质各向异性　　(b) 均质各向同性

图 12.14　安全端异种焊缝声场分布

通过模拟还可以分析不同检测参数对检测能力的影响。在图 12.13 所示的奥氏体焊缝模型根部设置不同倾斜角度和不同高度的裂纹类缺陷，得到的倾斜角度

和裂纹高度对缺陷回波的影响分别如图 12.15(a)和图 12.15(b)所示，可以看出，随着倾斜角度的增大，回波振幅一直变小；此工艺可以检测出小于 1mm 的缺陷，随着缺陷高度的增加，回波幅值逐渐变大，但是当缺陷高度大于 5mm 时，缺陷波幅几乎不再发生变化。



(a) 倾斜角度　　(b) 缺陷长度

图 12.15　倾斜角度和缺陷长度对回波振幅的影响

参 考 文 献

[1] 张俊等．基于实时声场计算的超声检测虚拟现实系统开发[C]．电力系统第 11 届无损检测会议，西宁，2009：147-151.

[2] 王臣．基于虚拟现实的承压设备超声检测系统的研究[D]．武汉：武汉大学，2009.

[3] 丁辉等．超声检测计算模型的建立与仿真软件的开发[J]．无损检测，2009，31(8)：614-618.

[4] 张俊等．核电站关键部件超声检测计算分析系统开发[J]．核动力工程，2009，30(6)：112-116.

第 13 章　无损检测可靠性分析

无损检测可靠性的定义为“在给定的检测条件和工艺下，能够检测出某一尺寸范围的缺陷的可能性”[1]。因为在无损检测过程中，即使对特征完全相同的缺陷，在重复检测时，也可能得到不同的检测结果，检测结果会呈现出某一种形式的分布，所以需要用统计学来描述检测可靠性。常用的统计特征量有检出率(probability of detection，POD)、定量准确率(probability of sizing，POS)、错报率(probability of false alarm，PFA)和受训者工作特征(receiver operating characteristic，ROC)等。针对不同的检测数据类型，可以采用相应的实验或理论概率模型来计算统计特征量与缺陷尺寸之间的关系曲线(如 POD 曲线)，有助于分析工件参数、缺陷参数、检测参数和人员等因素对 NDT 检测可靠性的影响，从而优化检测工艺，提高 NDT 检测可靠性。此外，概率模型还可以与断裂力学结合，用于工件的失效概率评定和寿命评估。

13.1　可靠性概率统计模型

在使用概率框架进行 NDT 数据的可靠性分析时，主要有两种数据记录形式：第一种是 hit/miss 数据，用 1 和 0 的记录缺陷被检测到或者漏检，当缺陷被检出时，POD=1，当缺陷被漏检时，POD=0；第二种是信号响应数据，即 $\hat{a}$ 数据，记录的是 UT 的信号幅值、ECT 的电压峰值、FPT 的荧光强度等。两种数据类型都可以用多种概率分布来描述，但是前者最适合的是 log-odds 分布模型，后者最适合的是对数正态分布模型。

13.1.1　hit/miss 型数据模型

图 13.1 为文献[1]给出的平面铝板超声表面波检测的 hit/miss 型数据结果记录，板厚分别为 1.5mm 和 5.6mm，板中含有 31 个不同高度的断裂裂纹。缺陷结果记录为检测到(hit)，POD=1；漏检(miss)，POD=0。图 13.1 中给出了最小检出缺陷尺寸 a_{smallest} 和最大漏检缺陷尺寸 a_{largest}，而位于 a_{smallest} 线和 a_{largest} 线之间的区域表示缺陷有被检测到或者漏检的可能性。因此，计算这个区域缺陷检出率是评定检测可靠性的关键。

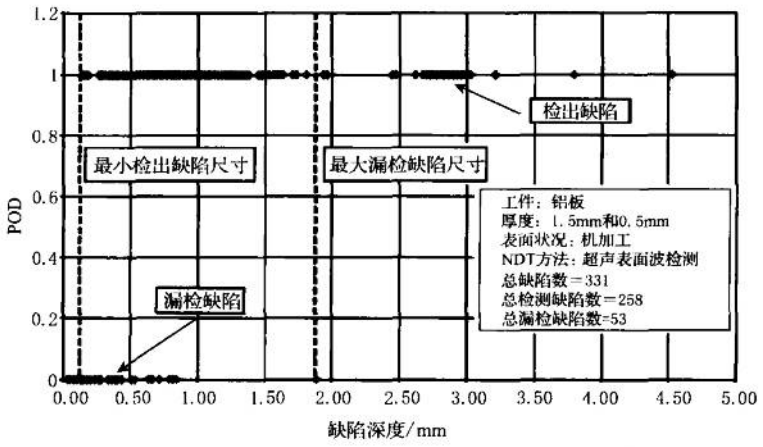


图 13.1 平面铝板超声表面波检测的 hit/miss 型数据结果记录

利用 log-logistic 分布计算 hit/miss 数据的 POD 函数，其表达式为

$$\mathrm{POD}(a)=\frac{e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\ln a-m}{\sigma}\right)}}{1+e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\ln a-m}{\sigma}\right)}} \tag{13.1.1}$$

式中，a 为缺陷尺寸；m 和 σ 分别为平均值和标准差。式(13.1.1)的另外一个形式为

$$\mathrm{POD}(a)=\frac{e^{(\alpha+\beta\ln a)}}{1+e^{(\alpha+\beta\ln a)}} \tag{13.1.2}$$

其中各个系数之间的关系为

$$m=-\frac{\alpha}{\beta} \tag{13.1.3}$$

$$\sigma=\frac{\pi}{\beta\sqrt{3}} \tag{13.1.4}$$

从式(13.1.2)可以推导出

$$\ln\left(\frac{\mathrm{POD}(a)}{1-\mathrm{POD}(a)}\right)=\alpha+\beta\ln a \tag{13.1.5}$$

式(13.1.5)左边的项称为“odds”的对数(odds＝成功的概率/失败的概率)。式(13.1.5)表明 odds 的对数和 a 的对数呈线性关系：

$$\ln(\mathrm{odds})\propto\ln a \tag{13.1.6}$$

所以称用于 hit/miss 数据的模型为“log-odds 模型”。

13.1.2 信号响应型数据模型

无损检测的另一种数据记录形式是记录缺陷响应信号的幅值 $\hat{a}$。只有当 $\hat{a}$ 大

于系统的信号记录阀值 $\hat{a}_{th}$ 时，才会被记录，若 $\hat{a}<\hat{a}_{th}$，则记录信号为 $\hat{a}_{th}$；信号响应随着缺陷尺寸等参数增大而增大，但当缺陷尺寸增大到一定数值时，信号响应 $\hat{a}$ 不再增加，即 $\hat{a}$ 存在饱和值 $\hat{a}_{sat}$。

利用概率密度计算信号响应数据 $\hat{a}$ 的 POD 与缺陷尺寸 a 关系曲线的原理如图 13.2 所示。对给定尺寸 a 的缺陷，信号响应的幅值 $\hat{a}$ 可以用一种概率分布形式，例如正态分布函数来表示。当设定一个检测阀值 $\hat{a}_{dec}$，即当 $\hat{a}>\hat{a}_{dec}$ 时，表示该缺陷可以被检出。阀值线与概率密度函数所围区域的面积即为该缺陷尺寸对应的 POD。所以 POD(a)可以用概率密度函数 $g(a)(\hat{a})$ 表示

$$\mathrm{POD}(a)=\int_{\hat{a}_{dec}}^{\infty} g(a)(\hat{a})\mathrm{d}\hat{a} \tag{13.1.7}$$

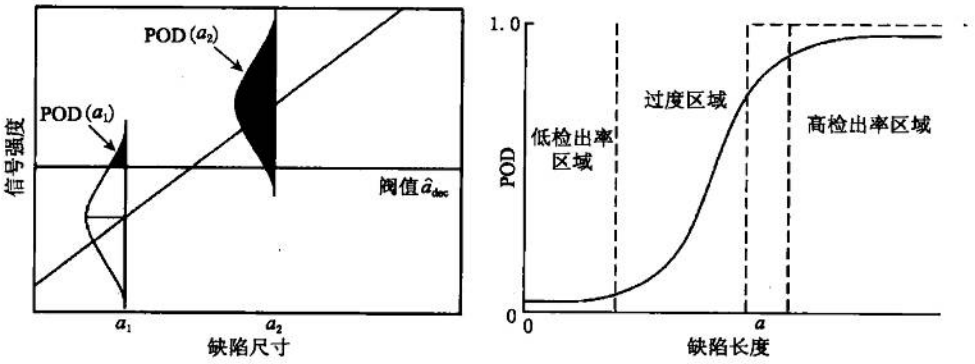


图 13.2　信号响应型数据 POD 计算原理

假设信号响应 $\hat{a}$ 与缺陷尺寸 a 的对数为线性关系，可以写为

$$\ln\hat{a}=\beta_0+\beta_1\ln a+\delta \tag{13.1.8}$$

式中，$\ln\hat{a}$ 为缺陷信号响应对数值；$\ln a$ 为缺陷参数的对数值；δ 为随机误差，并假设该随机误差为正态分布形式，平均值为零，标准差为 σ_δ。只有当 $\hat{a}>\hat{a}_{dec}$ 时，认为缺陷被检出，其中 $\hat{a}_{dec}$ 为设定的检测阀值，则检出率 POD(a)可以表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{POD}(a)&=\mathrm{probability}(\hat{a}>\hat{a}_{dec})\\ \mathrm{POD}(a)&=\mathrm{probability}(\ln\hat{a}>\ln\hat{a}_{dec})\\ \mathrm{POD}(a)&=1-\Phi\left(\frac{\ln\hat{a}_{dec}-(\beta_0+\beta_1\ln a)}{\sigma_\delta}\right)\end{aligned} \tag{13.1.9}$$

式中，Φ 表示标准正态分布，利用正态分布的对称性，式(13.1.9)可以化简为

$$\mathrm{POD}(a)=\Phi\left(\frac{\ln a-\dfrac{\ln\hat{a}_{dec}-\beta_0}{\beta_1}}{\dfrac{\sigma_\delta}{\beta_1}}\right) \tag{13.1.10}$$

式(13.1.10)为对数正态分布函数的积分，裂纹长度的对数平均值和标准方差如下：

$$\mu = \frac{\ln \hat{a}_{\mathrm{dec}} - \beta_0}{\beta_1}, \quad \sigma = \frac{\sigma_\delta}{\beta_1} \tag{13.1.11}$$

式中，参数 β_0、β_1 和 σ_δ 由极大似然法计算，有关极大似然法计算参数的过程见13.2节。

13.1.3 95%置信下限

在进行重复实验时，相同缺陷的信号响应可能落入置信区间之外或之内，落入置信区间之内的概率通常用置信度水平描述，落入置信区域之外的概率通常用显著性水平描述。在利用POD曲线分析检测数据时，通常计算95%置信下限的POD曲线，并设定 $a_{90/95}$ 值。$a_{90/95}$ 表示尺寸为 a 的缺陷，检出率为90%的置信度为95%[17]。置信下限的POD曲线的计算需要借助于信息矩阵。信息矩阵 I 的单元 I_{ij} 为期望值，可以表示为

$$I_{ij} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \ln f(X_i;\theta)\right] \tag{13.1.12}$$

式中，X_i 为第 i 次的检测结果；$f(X_i;\theta)$ 为密度函数，表示第 i 次的检测结果为 X_i 的概率；$\theta=[\theta_1,\cdots,\theta_k]^{\mathrm{T}}$ 为参数矩阵($i,j=1,\cdots,k$)。对于hit/miss数据，X_i 取0或1，$\theta=[\mu,\sigma]^{\mathrm{T}}$；对于信号响应数据，$f(X_i;\theta)$ 为正态分布函数，其参数值为 $\theta=[\beta_0+\beta_1\ln a,\sigma_\delta]^{\mathrm{T}}$。将极大似然法计算的参数带入信息矩阵，并写为

$$I(\mu,\sigma) = \frac{n}{\sigma_\delta}\begin{bmatrix} k_0 & -k_1 \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix} \tag{13.1.13}$$

式中，n 为实验中缺陷数量，则置信下限POD(a)函数为

$$\mathrm{POD}(a) = \Phi(\hat{z} - h) \tag{13.1.14}$$

其中，$\Phi(z)$为标准累积正态分布，其参数为

$$\hat{z} = \frac{\ln a - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \tag{13.1.15}$$

$$h = \left[\frac{\gamma}{nk_0}\left(1 + \frac{k_0\hat{z}+k_1}{k_0 - k_1^2}\right)\right]^{0.5} \tag{13.1.16}$$

这里，γ 的值由表13.1给出[2]。

表13.1 γ 的值

置信水平/%	样本容量								
	20	25	30	40	50	60	80	100	∞
90	3.903	3.884	3.871	3.855	3.846	3.839	3.831	3.827	3.808
95	5.243	5.222	5.208	5.191	5.180	5.173	5.165	5.159	5.138
99	8.401	8.376	8.359	8.338	8.325	8.317	8.306	8.300	8.273

13.2　可靠性模型的参数估计

极大似然法(maximum likelihood method，ML)是统计学中常用的一种参数估计方法。现用极大似然法进行无损检测可靠性模型参数估计。

假设 X_i 表示第 i 次检测的结果，$f(X_i,\theta)$表示得到检测结果 X_i 的概率，其中 $\theta=[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k]^{\mathrm{T}}$ 为概率模型中 k 个参数组成的向量。例如，对于 hit/miss 实验，X_i 为 0 或 1，其中 a 为第 i 个缺陷的尺寸，$\theta=[\mu,\sigma]^{\mathrm{T}}$。对于信号响应数据，$X_i$ 为信号响应的对数，$f(X_i,\theta)$为正态分布密度函数，平均值和标准差为 $\theta=[\beta_0+\beta_1\ln a,\sigma_\delta]^{\mathrm{T}}$。如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 表示 n 个缺陷的独立检测结果。似然性 L 的函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{i=n}f(X_i,\theta) \tag{13.2.1}$$

对于一组实验来说，X_i 为所测值，是已知的，所以方程(13.2.1)为 $\theta=[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k]^{\mathrm{T}}$ 的函数。极大似然法就是要得到使 $L(\theta)$值最大的 $\hat{\theta}$ 值。对这里的模型，更适合用 $L(\theta)$的对数：

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}f(X_i,\theta) \tag{13.2.2}$$

所以可以采用求导的方法来得到最值，求导之后得到 k 个方程

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_i}=0,\qquad i=1,2,\cdots,k \tag{13.2.3}$$

然后对由 k 个方程构成的方程组进行求解，即可得到模型参数。

13.2.1　hit/miss 型数据模型的参数估计

对于适用于 hit/miss 型数据的 log-odds 模型，其参数估计是直接基于以 0 和 1 形式记录的检测数据。假设实验设置 n 个裂纹，对每个裂纹检测 k 次，则其似然函数可以表示为

$$L(\mu,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}p_i^{Z_{ij}}(1-p_i)^{1-Z_{ij}} \tag{13.2.4}$$

式中，Z_{ij} 为 0 或 1，表示第 i 个缺陷的第 j 次检测为漏检或检出，则对于尺寸为 a_i 的缺陷，其检出率

$$p_i=\frac{h(a_i)}{1+h(a_i)} \tag{13.2.5}$$

$$h(a_i)=\exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{\ln(a_i-\mu)}{\sigma}\right]\right) \tag{13.2.6}$$

似然函数的对数形式为

$$\ln L(\mu,\sigma)=\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{k}[Z_{ij}\ln(p_i)+(1-Z_{ij})\ln(1-p_i)] \tag{13.2.7}$$

对其进行求导，可得到关于参数 μ 和 σ 的方程组：

$$0=\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}=\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{k}\left[\frac{Z_{ij}}{p_i}\frac{\partial Z_{ij}}{\partial \mu}+\frac{(1-Z_{ij})}{(1-p_i)}\frac{\partial p_i}{\partial \mu}\right] \tag{13.2.8}$$

$$0=\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}=\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{k}\left[\frac{Z_{ij}}{p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \sigma}+\frac{(1-Z_{ij})}{(1-p_i)}\frac{\partial p_i}{\partial \sigma}\right] \tag{13.2.9}$$

进行简化得到

$$0=\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{k}\frac{Z_{ij}}{k}-\sum_{i}^{n}\frac{h(a_i)}{1+h(a_i)} \tag{13.2.10}$$

$$0=\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{k}\frac{Z_{ij}}{k}\ln a_i-\sum_{i}^{n}\frac{\ln a_i h(a_i)}{1+h(a_i)} \tag{13.2.11}$$

上述方程组可采用牛顿迭代法等标准数值方法进行求解，由于牛顿迭代法存在局部最大值收敛问题，必须选择合适的初值进行计算：

$$\mu_1=X_n-\frac{X_1 p_1}{2}-0.5\sum_{i=2}^{n}(X_i-X_{i-1})(p_i-p_{i-1}) \tag{13.2.12}$$

$$\sigma_1=\left[X_n^2-\frac{p_1}{2}X_1^2-\mu_1^2-0.5\sum_{i=2}^{n}(X_i^2-X_{i-1}^2)(p_i-p_{i-1})\right]^{0.5} \tag{13.2.13}$$

式中，$X_1,\cdots,X_n$ 为缺陷尺寸的对数的顺序排列；p_i 为第 i 个缺陷的检出率。如果求解过程不收敛，可以尝试采用更大的缺陷尺寸作为初始值。

在得到模型参数 μ 和 σ 之后，即可根据信息矩阵 I 求 POD 的置信下限，根据式(13.2.11)，log-odds 模型信息矩阵的元素可以表示为

$$I_{11}=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\pi^2}{3}\sum_{i}^{n}\frac{h(a_i)}{[1+h(a_i)]^2}=\frac{nk_0}{\sigma^2} \tag{13.2.14}$$

$$I_{12}=I_{21}=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\pi^2}{3\sigma}\sum_{i}^{n}\frac{\ln a_i h(a_i)}{[1+h(a_i)]^2}=-\frac{nk_1}{\sigma^2} \tag{13.2.15}$$

$$I_{22}=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\pi^2}{3\sigma^2}\sum_{i}^{n}\frac{(\ln a_i)^2 h(a_i)}{[1+h(a_i)]^2}=\frac{nk_2}{\sigma^2} \tag{13.2.16}$$

式中，k_0、k_1、k_2 即为用于计算置信下限的参数，然后根据式(13.2.12)～式(13.2.15)进行置信下限的求解。

log-odds 模型需要保证在最大漏检尺寸和最小检出尺寸区间范围内有足够的缺陷尺寸数量，一般要求有效样本容量为 60。对于一个设计合理的实验，即有足够的缺陷样本尺寸位于有效区域，基于极大似然法可以计算得到合理的结果。但是如果该要求没有满足，则可能出现以下几种不能接受的结果：

(1)如果最大漏检尺寸和最小检出尺寸之间没有重叠，则关于参数 μ 和 σ 的式(13.2.8)和式(13.2.9)将无解。

(2)如果没有进行合理的实验设计，可能出现小缺陷的检出率高于大缺陷，这会导致 POD 曲线随着缺陷尺寸增大而减小。

(3)有可能存在这样一种情况：POD 曲线是可以接受的，但是其置信下限曲线却随着缺陷尺寸增大而减小。这个可以通过 log-odds 和缺陷尺寸对数的线性关系来判断，如果斜率为正数，则 POD 随着尺寸增加而增加，如果为负数，则置信下限会随着尺寸增加而下降，这就证明该实验数据不适于 log-odds 模型。

(4)模型不适用的表现一般是 σ 较大而 μ 较小，或者置信区间很大。尽管没有足够的数据进行 POD 模型的假设检验，但仍然可进行一些主观的判断。若要得到合理的 POD 曲线及精度较高的置信下限，则必须有更多的尺寸位于有效范围内。这样，即使每个缺陷只检测一次(得到概率为 0 或 1 结果)，依据本模型也可以得到较好的效果。

13.2.2　信号响应型数据模型的参数估计

对于信号响应数据，POD(a)函数的参数由信号响应 $\hat{a}$ 数据进行估计。若 $\hat{a}$ 值都位于信号阈值和饱和极限之间，利用 $\ln\hat{a}$ 和 $\ln a$ 数据的样本回归分析得到 POD(a)函数及其置信下限的信息。实际上，回归分析中的最小二乘法也出现在极大似然估计中。本节所用的分析可以用于更为一般性的 $\hat{a}$ 数据。

在信号响应分析中，认为尺寸为 a 的缺陷，其信号响应 $\hat{a}$ 呈正态分布，平均值和方差为

$$\mu^{\ln\hat{a}} = \beta_0 + \beta_1 \ln a \tag{13.2.17}$$

$$\sigma^{\ln\hat{a}} = \sigma_\delta \tag{13.2.18}$$

式中，方差 σ_δ 与缺陷尺寸无关。为了简写，令 $Y_i = \ln\hat{a}_i$，$X_i = \ln a_i$，随机变量

$$Z = \frac{Y - (\beta_0 + \beta_1 X)}{\sigma_\delta} \tag{13.2.19}$$

为标准正态分布。设 $\phi(z)$和 $\Phi(z)$分别为概率密度分布函数和累积分布函数

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \tag{13.2.20}$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \tag{13.2.21}$$

似然函数分为三个区域：

(1)R 区域，即 $\hat{a}$ 数据记录区域。

(2)T 区域，只知道最大值($\hat{a}$<threshold)。

(3)S 区域，只知道最小值($\hat{a}$>saturation limit)。

整个样本的似然函数由三个区域的似然函数相乘得到

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma_\delta) = L_R \cdot L_T \cdot L_S \tag{13.2.22}$$

$$L_R = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma}\phi(Z_i) \tag{13.2.23}$$

$$L_T = \prod_{i=1}^{t} \Phi_i(a_{\text{th}}) \tag{13.2.24}$$

$$L_S = \prod_{i=1}^{s} [1-\Phi_i(a_{\text{sat}})] \tag{13.2.25}$$

因为 $1/\sigma\phi(Z_i)\mathrm{d}z$ 是 R 区域第 i 个缺陷的信号响应为 $\hat{a}_i$ 的概率；$\Phi_i(a_{\text{th}})$ 为在 S 区域的第 i 个缺陷得到的信息响应为 $\hat{a}_i$ 的概率；$1-\Phi_i(a_{\text{sat}})$ 为在 T 区域的第 i 个缺陷得到的信息响应为 $\hat{a}_i$ 的概率。似然函数取对数

$$\ln L(\beta_0,\beta_1,\sigma_\delta) = -r\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_R [Y_i-(\beta_0+\beta_1 X_i)]^2 + \sum_T \ln\Phi_i(a_{\text{th}}) + \sum_S \ln(1-\Phi_i(a_{\text{sat}})) \tag{13.2.26}$$

式中，r 为位于区间 R 的缺陷数量，即记录得到的 $\hat{a}$ 数据量。

极大似然法求解：

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} = \frac{1}{\sigma}\left[\sum_R Z_i + \sum_S V(Z_i) - \sum_T W(Z_i)\right] \tag{13.2.27}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\sigma}\left[\sum_R Z_i X_i + \sum_S X_i V(Z_i) - \sum_T X_i W(Z_i)\right] \tag{13.2.28}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma}\left[-r + \sum_R Z_i^2 + \sum_S Z_i V(Z_i) - \sum_T Z_i W(Z_i)\right] \tag{13.2.29}$$

式中

$$V(Z_i) = \frac{1-\phi(Z_i)}{\Phi(Z_i)} \tag{13.2.30}$$

$$W(Z_i) = \frac{\phi(Z_i)}{\Phi(Z_i)} \tag{13.2.31}$$

可选用 Newton-Raphson 迭代法等标准数值方法求解式(13.2.27)～式(13.2.29)。迭代法初始值的选择为由记录的数据进行回归分析得到的截距、斜率和方差。

在计算得到 POD 函数的参数之后，置信下限的计算可以依照以下五个步骤进行：

(1)由式(13.2.11)得到参数 β_0、β_1、σ_δ 的信息矩阵。

(2)由信息矩阵求逆得到 $\hat{\beta}_0$、$\hat{\beta}_1$、$\hat{\sigma}_\delta$ 的方差协方差矩阵(见式(13.2.1))。

(3)参数 μ、σ 的方差协方差矩阵由 β_0、β_1、σ_δ 与 μ、σ 的关系等式进行一阶泰勒级数展开得到(见式(13.2.3) 和式(13.2.4))。

(4)参数 $\hat{\mu}$、$\hat{\sigma}$ 的信息矩阵由式(13.2.12)得到的方差协方差矩阵进行求逆得到。

(5)将计算值带入式(13.2.12)～式(13.2.15),得到置信下限。

参数 $\hat{\theta}=(\beta_0,\beta_1,\sigma_\delta)$ 的信息矩阵单元为

$$I_{11}=\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0{}^2}=\frac{1}{\sigma^2}\left[r+\sum_S \lambda(Z)-\sum_T \psi(Z)\right] \tag{13.2.32}$$

$$I_{12}=I_{21}=\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \beta_1}=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_R X+\sum_S \lambda(Z)-\sum_T \psi(Z)\right] \tag{13.2.33}$$

$$I_{13}=I_{31}=\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma_\delta}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\left[2\sum_R Z+\sum_S V(Z)+\sum_S Z\lambda(Z)-\sum_T W(Z)-\sum_T Z\psi(Z)\right] \tag{13.2.34}$$

$$I_{22}=\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1{}^2}=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_R X^2+\sum_S X^2\lambda(Z)-\sum_T X^2\psi(Z)\right] \tag{13.2.35}$$

$$I_{23}=I_{32}=\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1 \partial \sigma_\delta}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\left[2\sum_R XZ+\sum_S XV(Z)+\sum_S XZ\lambda(Z)-X\sum_T W(Z)-\sum_T XZ\psi(Z)\right] \tag{13.2.36}$$

$$I_{33}=\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_\delta{}^2}=\frac{1}{\sigma^2}\left[-r+3\sum_R Z^2+2\sum_S ZV(Z)+\sum_S Z^2\lambda(Z)-2\sum_T ZW(Z)-\sum_T Z^2\psi(Z)\right] \tag{13.2.37}$$

$$\lambda(Z)=V(Z)[V(Z)-Z] \tag{13.2.38}$$

$$\psi(Z)=-W(Z)[W(Z)+Z] \tag{13.2.39}$$

用 $V(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}_\delta)$ 代表由极大似然估计得到的信号响应型数据的方差协方差矩阵。$V(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}_\delta)$ 由信息矩阵求逆得到。$V(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}_\delta)$ 矩阵可以定义为

$$V(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}_\delta)=\begin{bmatrix}\sigma_0^2 & \sigma_{01} & \sigma_{0\delta}\\ \sigma_{01} & \sigma_1^2 & \sigma_{1\delta}\\ \sigma_{0\delta} & \sigma_{1\delta} & \sigma_\delta^2\end{bmatrix} \tag{13.2.40}$$

利用泰勒级数展开方程(13.2.10),$\hat{\mu}$、$\hat{\sigma}$ 的方差协方差矩阵为

$$V(\mu,\sigma)=\frac{1}{\beta_1^2}TV(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}_\delta)T \tag{13.2.41}$$

转换矩阵 T 定义为

$$T=\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ 0 & \sigma & -1\end{bmatrix} \tag{13.2.42}$$

相乘得到 $\hat{\mu}$、$\hat{\sigma}$ 的方差和协方差:

$$\sigma_{\hat{\mu}}^2 = \frac{1}{\beta_1^2}(\sigma_0^2 + 2\hat{\mu}\sigma_{01} + \hat{\mu}^2\sigma_1^2)$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\sigma}\hat{\mu}} = \hat{\sigma}_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} = \frac{1}{\beta_1^2}(\hat{\sigma}\sigma_{01} - \sigma_{0\delta} - \hat{\mu}\sigma_{1\delta} + \hat{\mu}\hat{\sigma}\sigma_1^2)$$

$$\sigma_{\hat{\sigma}}^2 = (\sigma_\delta^2 + 2\hat{\sigma}\sigma_{1\delta} + \hat{\sigma}^2\sigma_1^2) \tag{13.2.43}$$

变换方差协方差矩阵，得到参数 k_0、k_1、k_2，带入式(13.2.12)～式(13.2.15)，可以计算 POD(a)置信下限。

13.3 基于可靠性分析的检测工艺评定与优化

可靠性分析主要有三种方法：第一种方法是制造出与实际工件完全一样的模拟体，并在其中制造真实缺陷，然后按照预先设计的实验方案进行 POD 曲线的绘制，早期的可靠性研究项目，如 NIL[1]、PISC[3,4]、Nordtest[4]、ABENDT[5,6]都是采用这种方法，由于实际工件的结构和材质复杂，该方法存在工件和缺陷制造困难的问题；第二种方法是针对复杂结构工件及缺陷提出的传递函数法，即制作出含切槽的复杂工件、含真实缺陷的试块和含切槽的试块进行实验，然后基于三者的检测结果，利用传递函数推导出含真实缺陷实际工件的 POD，如美国、澳大利亚[7,8]等国家进行的机翼结构紧固孔裂纹超声检测可靠性项目即采用这种方法；第三种方法即基于数值模拟的现场工艺可靠性分析，以数值模拟的方法代替实验过程，该方法是目前研究的热点，美国的 MAPOD 小组[9]、英国的 NNDTC[1,10,11]、荷兰的 TNOTPD 公司[12,13]都致力于该方法的研究，并开发出专用软件。

13.3.1 基于数值模拟的现场工艺可靠性评定

下面基于数值模拟方法对核电站反应堆压力容器法兰筒体焊缝的超声检测进行现场可靠性工艺评定。法兰筒体焊缝 S/C200 基体材料为 16MND5 低合金锻钢，堆焊层材料为 304L 不锈钢，其结构及探头扫查区域如图 13.3 所示。

使用 5 种探头对法兰筒体焊缝 S/C200 进行检测。第一种探头为 45°横波接触探头，中心频率为 1.5MHz，晶片尺寸为 25mm×23mm；第二种探头为 55°横波接触探头，中心频率为 1.5MHz，晶片尺寸为 25mm×23mm；第二种探头为 70°纵波双晶探头，中心频率为 2MHz，两个晶片尺寸相同，均为 12mm×25mm，聚焦深度为 10mm；第四种探头为 0°纵波接触探头，中心频率为 2MHz，晶片尺寸为 Φ25mm；第五种探头为 0°纵波双晶探头，中心频率为 5MHz，两个晶片尺寸相同，均为 1/2Φ20mm，聚焦深度为 7mm。其中 70°纵波双晶探头和 0°纵波双晶探头主要用于检测堆焊层下裂纹、未熔合等缺陷。

使用 0°L、45°S、55°S 三种探头时，以 70mm 深 Φ2mm 横孔的 A 扫最高值作为

参考，计算各类缺陷回波的相对波幅，基于仿真软件计算得到三种探头对应的横孔幅值分别为 2.771、2.2718、1.8676。使用 0°L、70°L 两种双晶探头时，以 10mm 深 Φ2mm 横孔的 A 扫最高值作为参考，基于 UT-CAS 计算得到两种探头对应的横孔幅值分别为 0.658、0.054764。为了研究各种探头对不同长度缺陷的检出率，利用 UT-CAS 计算出高度为 0.5～20mm 范围内的 11 个表面光滑的平面型裂纹的回波幅值，所得结果如表 13.2 所示，裂纹长度为 10mm，缺陷面与探头发射声束垂直。

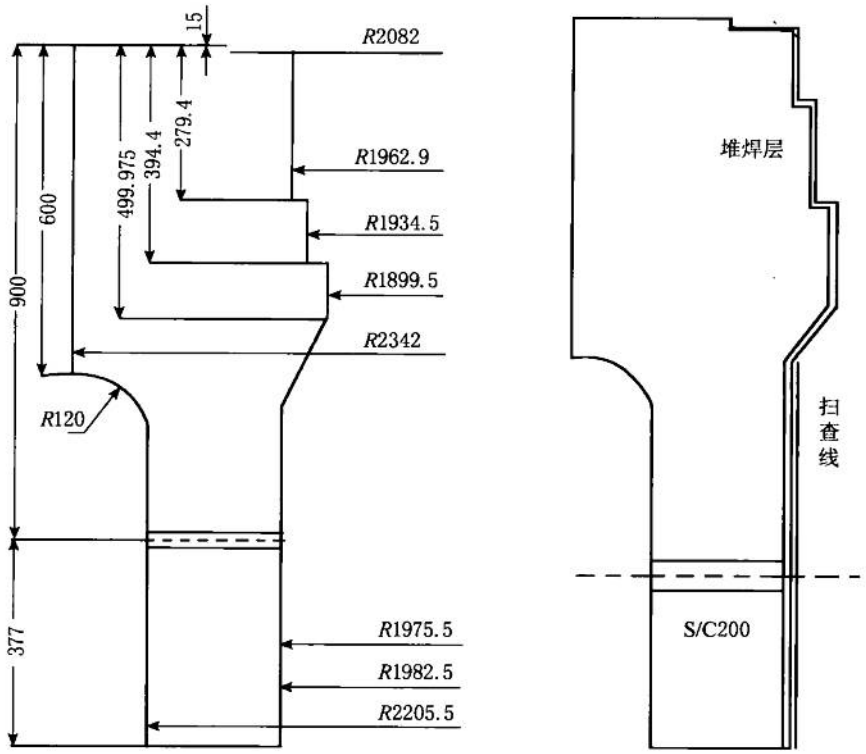


图 13.3　法兰筒体焊缝 S/C200 结构及扫查区域

表 13.2　不同尺寸裂纹回波幅值

探头	0.5mm	0.75mm	1mm	1.5mm	2mm	2.5mm	3mm	5mm	10mm	15mm	20mm
0°L	−13.9	−10.4	−7.9	−4.5	−2.1	−0.1	1.4	5.5	10.3	11.8	12.3
0°dL	−12.9	−9.4	−6.8	−3.4	−1	0.9	2.4	6.5	11.4	13	13.3
45°S	−8.5	−4.9	−2.5	0.9	3.3	5.1	6.5	10.8	15.4	17.2	18
55°S	−10	−6.5	−4.1	−0.5	1.9	3.8	5.4	9.5	14.7	16.8	17.5
70°dL	−9.8	−6.4	−3.9	−0.6	1.5	3.6	5	8.6	11.3	12.1	11.8

选用累积正态分布模型对表 13.2 中的信号响应型数据进行 POD 曲线计算，选用极大似然法进行模型的参数估计，计算程序见附录 7。在计算之前，首先分析裂纹高度的对数与信号响应之间的关系。如图 13.4 所示，可以看到，五种探头所得到的信号响应都随着缺陷尺寸的增加而增加，且呈线性关系，当缺陷尺寸增大到一定程度时，信号响应趋于饱和。

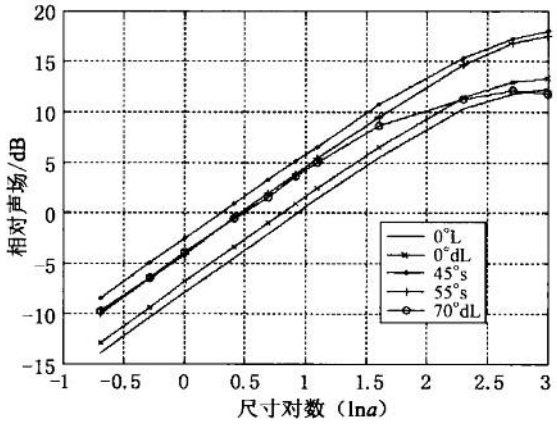


图 13.4 裂纹高度对数与信号响应的线性关系

若设置检测系统的检测阀值为 6dB，利用附录 7 中的程序计算得到各个探头的 POD 曲线如图 13.5 所示，参数 σ 和 μ 如表 13.3 所示。0°L 探头的 POD 曲线及其 95%置信下限如图 13.5(a)所示。对于 POD 曲线，当缺陷高度小于 4.5mm 时，其检出率接近 0；当缺陷尺寸大于 8.2mm 时，其检出率达到 100%。对于 95%置信下限曲线，当缺陷尺寸小于 5mm 时，其检出率接近 0；当缺陷尺寸大于 10mm 时，缺陷检出率达到 100%，其 $a_{90/95}$ 值为 7.8mm，即在 95%置信度下，高度为 7.8mm 的裂纹的检出率为 90%。0°L 双晶探头、45°S 探头、55°S 探头和 70°dL 双晶探头的 $a_{90/95}$ 值分别为 6.6mm、3.75mm、4.1mm 和 7.7mm。从五种探头的 $a_{90/95}$ 值比较来看，45°S 探头的 $a_{90/95}$ 值最小，说明该探头对小尺寸缺陷检测的灵敏度最高。从总体上看，可以认为该检测工艺所用的五种探头都具有较高的检测可靠性，对高度尺寸小于 7.8mm 的裂纹具有较高的检出率。由于超声仿真所考虑的缺陷均为表面光滑的平面型缺陷，不能够代表真实的裂纹，但是其可靠性评定结果仍然可以作为现场检测工艺设计的参考。

表 13.3 各种探头 POD 模型的参数

参数	0°L	0°dL	45°S	55°S	70°dL
μ	1.7758	1.6360	1.0922	1.2366	1.4544
σ	0.0845	0.0798	0.0763	0.0578	0.1795

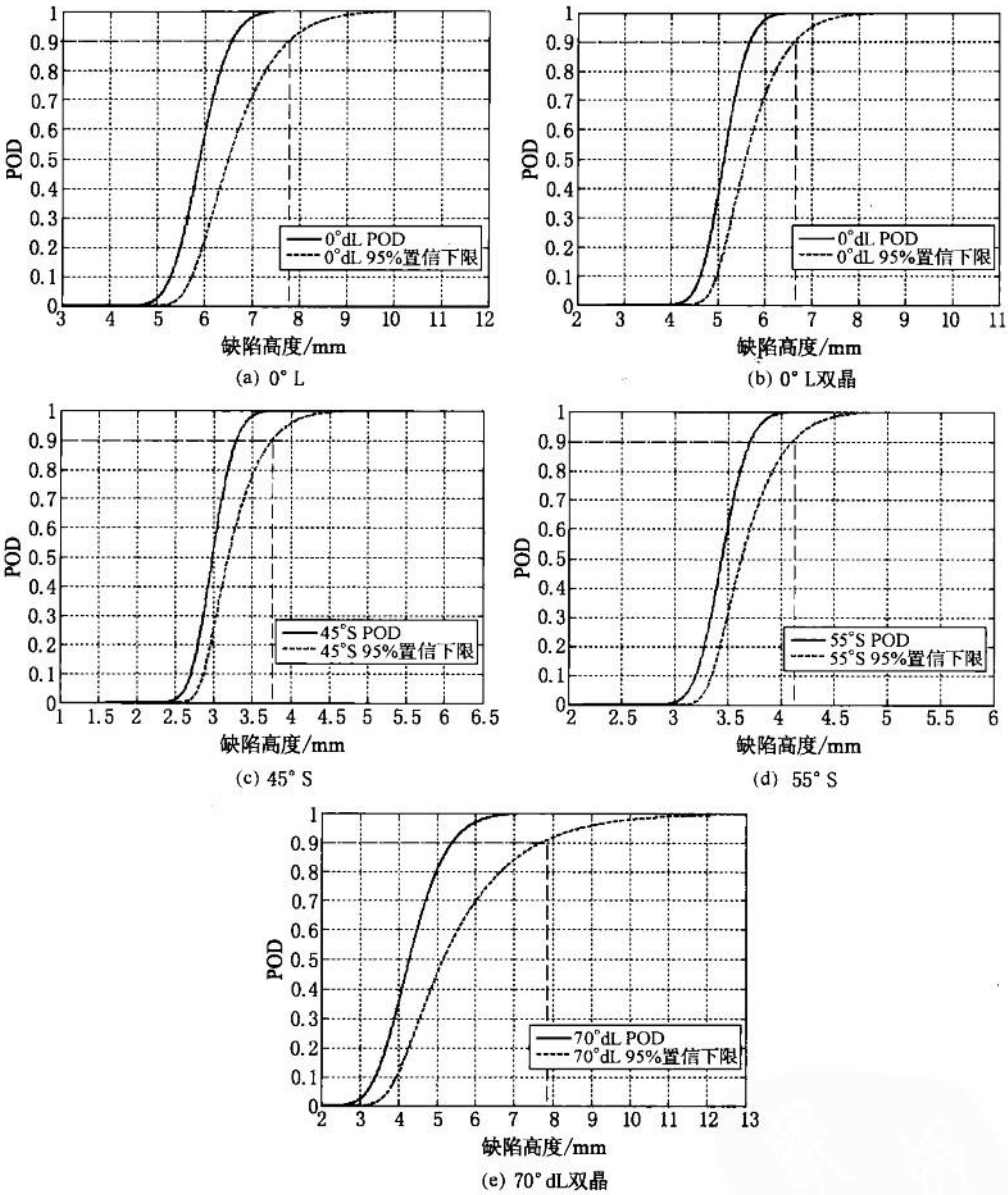


图 13.5　各种探头的 POD 曲线

13.3.2　基于综合参数分析的 TOFD 检测工艺优化

在针对某一具体的被检工件时，往往需要综合考虑各种参数的影响，选择最佳的检测工艺，现以裂纹的 TOFD 检测的实验研究[14]为例，通过对比不同检测条件下的 POD 曲线来优化检测工艺。

如图 13.6 所示两个铝试板中包含着 10 个长度相同、偏转角不同的切槽。切槽尺寸及偏转角如表 13.4 所示。采用手动超声检测，探头角度为 60°和 70°，频率为 4MHz，发射波形为纵波。

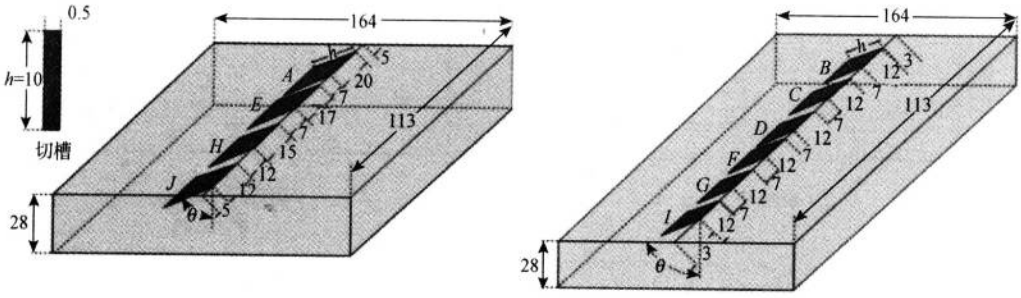


图 13.6 试块及缺陷分布示意图

表 13.4 缺陷尺寸表

切槽编号	高度	长度	角度
A	10mm	20mm	0°
B	10mm	12mm	5°
C	10mm	12mm	11°
D	10mm	12mm	17°
E	10mm	17mm	21°
F	10mm	12mm	27°
G	10mm	12mm	35°
H	10mm	15mm	42°
I	10mm	12mm	52°
J	10mm	12mm	62°

选择在以下四种布局下进行检测：①60°探头，探头相距 35mm；②60°探头，探头相距 55mm；③70°探头，探头相距 35mm；④70°探头，探头相距 55mm。每个缺陷进行 12 次检测，对四种布局下的 10 缺陷总共检测 480 次(12×10×4=480)。记录检测结果并计算 POD 和 POS 曲线，如图 13.7 所示。可以看到，四种情况下所有 POD 曲线具有正的斜率。布局③和布局④的 POD 数值要比布局①和布局②的要大。所有 POS 曲线也具有正的斜率。布局②的 POS 值最大，而布局①的 POS 值最小。所有的 POS 曲线上具有几乎相同的过渡区域。

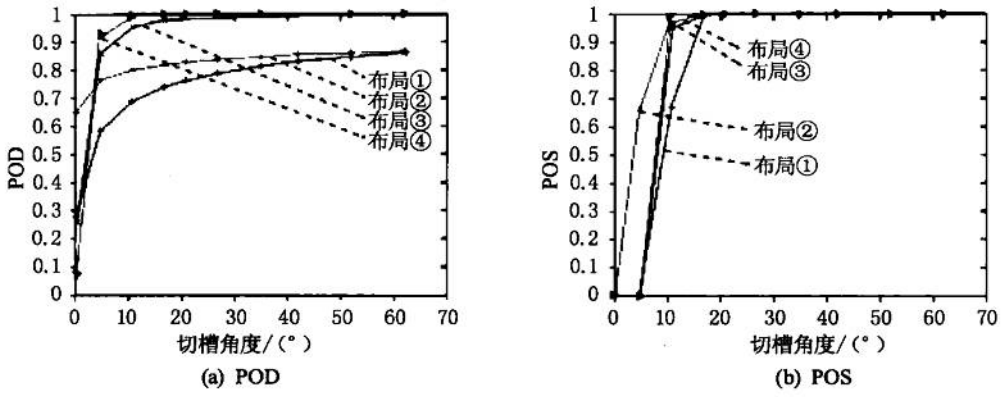
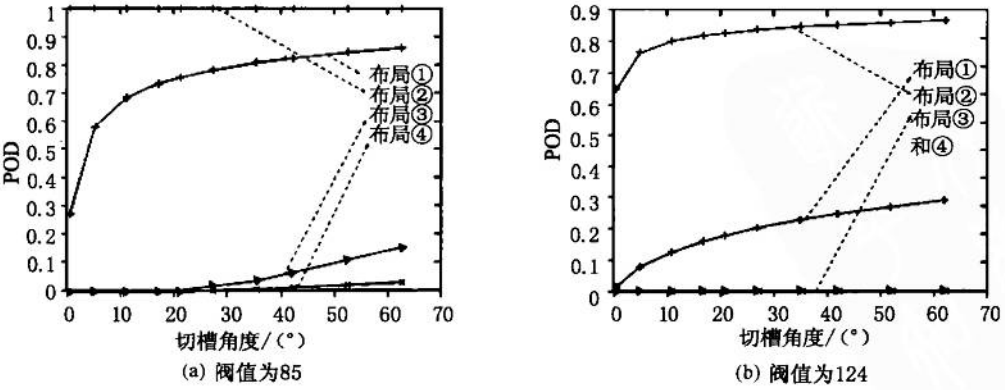


图 13.7　随切槽角度变化的 POD、POS 曲线

对于 5°的切槽角度，POS 的数值在布局②中大约为 65%，而在其他情况下为 0%。对于 11°的切槽角度，POS 的数值在布局②中为 100%，布局④中大约为 98%，布局③中为 94%，布局①中为 66%。当切槽角度大于 11°时，对于所有情况下的试验参数设置，POS 的数值为 100%。

门槛值 $\hat{a}_{\mathrm{dec}}$ 的选择对 POD 缺陷也会产生很大的影响。每一种布局下的 $\hat{a}_{\mathrm{dec}}$ 可以通过以下方式来确定：对 POD 分析，首先计算每个切槽的 12 次试验得到的幅值($\hat{a}$)的平均值，取其中最小的 $\hat{a}$ 作为 $\hat{a}_{\mathrm{dec}}$；对于 POS 分析，首先计算每个切槽的 12 次试验得到的倾斜角度($\hat{a}$)的平均值，然后计算 10 个角度的切槽的测量倾斜角度平均值($\hat{a}$)与真实的倾斜角度值(a)之间的差值，以 10 个数值中 $\hat{a}-a$ 的最大值定义为 $\hat{a}_{\mathrm{dec}}$。因此，对于四种布局可以得到四个 $\hat{a}_{\mathrm{dec}}$ 且根据每一个 $\hat{a}_{\mathrm{dec}}$ 可以生成相对应的 POS 或 POD 曲线。图 13.8 为 $\hat{a}_{\mathrm{dec}}$ 分别取 85、124、48 和 51 时，得到四种不同情况下的 POD 曲线，可以看到随着 $\hat{a}_{\mathrm{dec}}$ 取值的不同，POD 曲线显著变化。



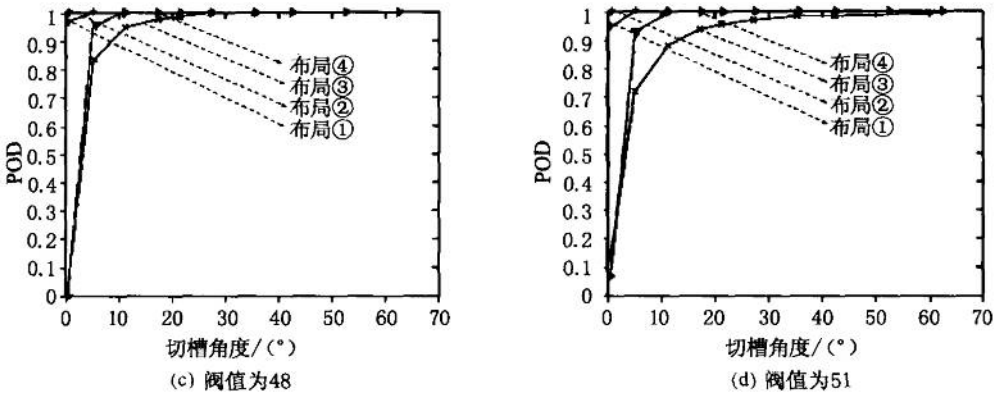


图 13.8 不同检测阀值下的 POD 曲线

13.3.3 人员可靠性分析

在研究人员可靠性时，NDT 方法可以分为两大类[15]：第一类为手眼并用型，如手动超声等；第二类为只需要用眼睛观察指示图像，如自动超声和射线等。显然在使用第一类检测方法时，人员因素占的比重更大。手动超声时，手法、设备调试、标定、环境、人员技能水平和精神状态等都会对检测结果产生影响。PISCIII、NIL 和 PANI 等项目研究表明人员误差因素对超声可靠性有很大影响，表现在降低整条 POD 曲线，NIL 项目发现自动 UT 的检出率一般大于 80%，而手工 UT 只有 50%。

现结合某次超声检测培训考试，进行人员可靠性分析。共有 25 个人员参加培训和考试，以考试结果作为缺陷的检出或漏检评定，检出记录为 1，漏检记录为 0，得到 hit/miss 型数据如图 13.9 所示。从图 13.9 中可以看到，缺陷的最小检测长度尺寸为 5mm，如左边虚线所示，最大漏检缺陷长度为 41mm，如右边虚线所示，位于两条线之间的尺寸区域为缺陷有可能检出或漏检的区域，是可靠性分析重点考虑的区域。

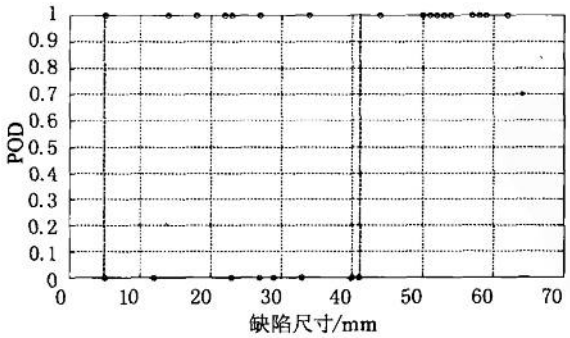


图 13.9 hit/miss 型数据结果记录

选择 log-odds 模型计算该组数据的 POD 曲线及其 95%置信下限曲线，选用极大似然法进行模型的参数估计，计算程序见附录 8，计算结果如图 13.10 所示。为了

进行对比分析，图 13.10 还给出了较高水平人员（A 组）和自动超声检测的 POD 曲线。从图 13.10 可以看到，缺陷检出率随着缺陷尺寸的增大而增大，对于受训者（B 组），当缺陷尺寸大于 66mm，检出率达到 50%，而其置信下限曲线在缺陷尺寸大于 120mm 时仍然低于 50%；对于较高水平人员（A 组），当缺陷尺寸为 40mm 时，检出率达到 80%，而其置信下限曲线在缺陷尺寸为 68mm 时到达 80%的检出率；对于自动超声而言，在所有的试板测试中，能够完全检测出所有缺陷。所以从分析的结果可以看到，三种情况中，自动超声检测可靠性最高，A 组人员次之，B 组人员最低。

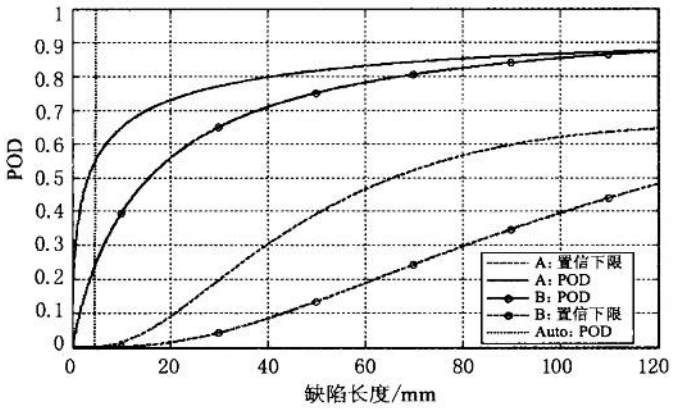


图 13.10　不同检测小组 POD 曲线对比

在缺陷评定过程中，人员的技术水平和经验都会对缺陷定量的准确性产生影响，即使同一个检测人员对相同缺陷进行评定也会得到较大差别的结果。图 13.11 为培训考核中有关缺陷指示长度的记录，以某较高水平人员利用端点 6dB

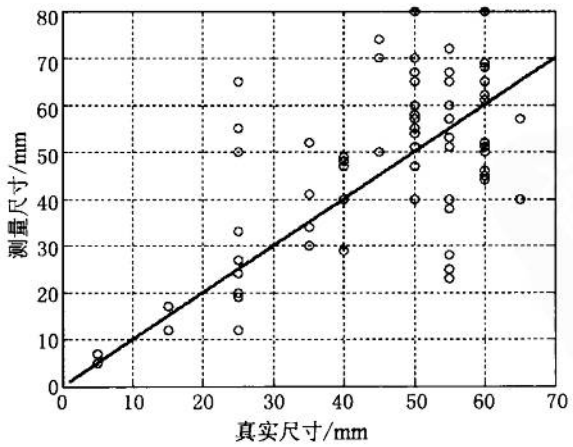


图 13.11　缺陷测量长度与真实长度对比

法测得的缺陷指示长度作为真实长度，圈点表示受训人员测量的缺陷长度，可以看到，对于相同尺寸的缺陷，不同检测人员得到的缺陷指示长度有较大的差别。因此有必要对缺陷定量可靠性进行评定。

和利用累积正态分布模型计算 POD 一样，首先进行缺陷响应与缺陷尺寸对数关系分析。利用线性拟合得到较高水平检测人员（A 组）和受训者（B 组）缺陷定量结果如图 13.12 所示，A 组的截距 β_0、斜率 β_1、标准差 σ 分别为 0.93、0.27 和 0.12，B 组的截距 β_0、斜率 β_1、标准差 σ 分别为 0.89、0.77 和 0.23，以此作为由极大似然法建立的参数方程组的牛顿迭代求解时的初值。

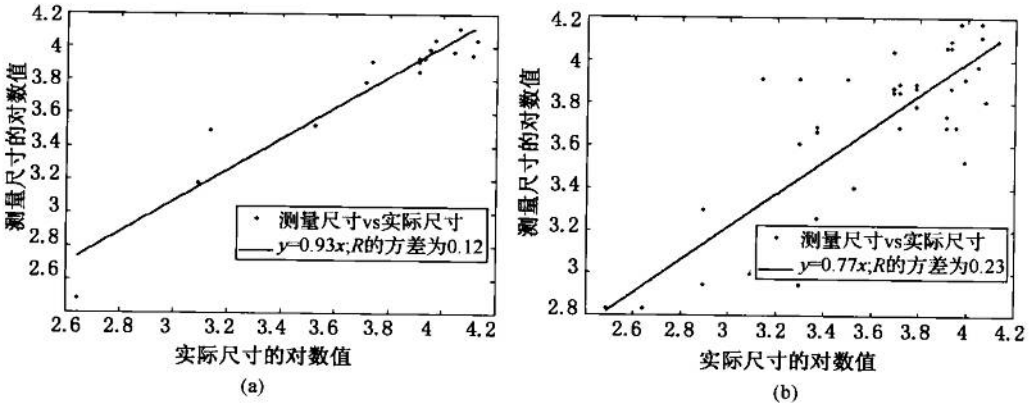


图 13.12 测量尺寸与缺陷真实尺寸对数关系

利用附录 1 的累积正态分布模型计算程序进行 POS 曲线计算。所有测量数据中测量值与实际缺陷值的差值的最大值作为定量阀值，计算得到 A 组和 B 组的 POS 曲线如图 13.13 所示。从 POS 曲线看，对于高水平人员，当缺陷尺寸为 16.5mm，其定量准确率达到 100%；而是对于受训者，当缺陷尺寸为 116mm 时，其

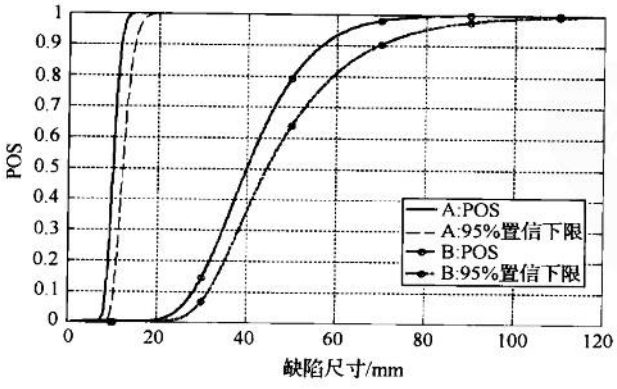


图 13.13 手工超声检测 POS

定量准确率才达到 100%。从 95%置信下限看，高水平检测人员和受训者的 $a_{90/95}$ 值分别为 14.7mm 和 70.1mm，即在 95%置信下限，对于高水平检测人员和受训者来说，长度为 14.7mm 和 70.1mm 的缺陷的检出率为 90%，高水平人员的 $a_{90/95}$ 远远大于受训者。

13.4　风险指引型在役检查

将失效概率和在役检查可靠性结合，计算各关键部件的失效风险，可以有助于在役检查计划的制订。研究在役检查可靠性对部件失效概率的影响已经应用到航天、核电等领域。目前，美国核管理委员会[16]、欧洲 ENIQ[17] 及中国台湾[18] 等众多国家和地区的组织都开展了风险指引型在役检查方面的研究工作。

13.4.1　计算公式

在材料服役过程中，裂纹达到初始尺寸 a_0 的时间（TTCI）为统计分布。可以将该分布假设为参数为 μ_T 和 σ_T 的正态分布：

$$f_T(t)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma_T}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu_T}{\sigma_T}\right)^2\right),\qquad 0\leqslant t<\infty \tag{13.4.1}$$

在裂纹达到初始尺寸之后，根据服役条件，可以采用多种裂纹生长模型来计算裂纹的尺寸，为了简化，这里采用帕里斯公式：

$$\mathrm{d}a/\mathrm{d}t=ZQa^b \tag{13.4.2}$$

式中，Q 和 b 为材料的常数；Z 为随机变量，考虑了材料特性、裂纹几何形状、裂纹模拟、裂纹破坏和应力等的变化，假设 Z 为参数为 μ_Z 和 σ_Z 的正态分布。

在役检查的检出率模型选 log-odds 模型：

$$\mathrm{POD}(a)=\frac{\exp(\alpha+\beta\ln a)}{1+\exp(\alpha+\beta\ln a)},\qquad 0<a<\infty \tag{13.4.3}$$

式中，α 和 β 用极大似然法计算。

假设当某一部件刚开始服役时，即在初始时刻（$t=0$），初始裂纹的尺寸 $a(0)$ 可以近似为参数为 μ_Z 和 σ_Z 的对数正态分布。可以将裂纹分布看成两部分：良性部分和不良部分，前者缺陷尺寸小于 a_0，后者尺寸大于 a_0，即

$$f_{a(0)}(x)=\begin{cases}f_{a(0)}(x;1), & x<a_0\\ f_{a(0)}(x;2), & x\geqslant a_0\end{cases} \tag{13.4.4}$$

若为良性缺陷，存在转换为不良缺陷的可能，转变时间为 TTCI，遵循方程（13.4.1）；若为不良缺陷，则缺陷的生长遵循方程（13.4.2）。

在实际应用中，都是预先做好检测计划，在时间上有周期性和非周期性的检测间隔，若假设为周期性检测，周期为 τ。在第一个 τ 时间内，裂纹尺寸分为良性和不

良两部分，失效主要由不良部分引起，而不良部分可能由原始的不良部分或者良性部分产生，由原始的不良部分引起的概率可以表示为

$$f'_{a(0)}(x;2)=\int_0^{\infty} f_{a(0)}[Y_1(x;\tau,z);2]J_1(x;\tau,z)f_Z(z)\mathrm{d}z,\quad x\geqslant a_0 \tag{13.4.5}$$

式中

$$Y_1(x;\tau,z)=\frac{x}{(1+\tau cQzx^c)^{1/c}} \tag{13.4.6}$$

$$J_1(x;\tau,z)=\frac{1}{(1+\tau cQzx^c)^{1/c}} \tag{13.4.7}$$

式中，$c=b-1$。由良性部分产生的概率为

$$f_{a(\tau)}(x;2)=q(0)\int_0^{\tau} f_Z[W(x;\tau-t)]I(x;\tau-t)f_T(t)\mathrm{d}t=q(0)g(x)\quad x<a_0 \tag{13.4.8}$$

式中

$$W(x;\tau-t)=[cQ(\tau-t)]^{-1}(a_0^{-c}-x^{-c}) \tag{13.4.9}$$

$$I(x;\tau-t)=[Q(\tau-t)]^{-1}x^{-b} \tag{13.4.10}$$

$$q(0)=\int_0^{a_0} f_{a(0)}(x)\mathrm{d}x \tag{13.4.11}$$

在第一个周期 τ 之后，检测前的失效可能性 $F(1)$，检测后的失效可能性 $\bar{F}(1)$ 以及裂纹小于 a_0 的可能性的计算如下：

$$F(1)=\int_{a_c}^{\infty} f_{a(\tau)}(x;2)\mathrm{d}x \tag{13.4.12}$$

$$\bar{F}(1)=\int_{a_c}^{\infty} f_{a(\tau)}(x;2)[1-\mathrm{POD}(x)]\mathrm{d}x \tag{13.4.13}$$

$$q(1)=\int_{a_0}^{\infty} f_{a(\tau)}(x;2)\mathrm{POD}(x)\mathrm{d}x+q(0)\left[1-\int_{a_0}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x\right] \tag{13.4.14}$$

式中，a_c 为临界裂纹尺寸。基于相似的步骤，第 n 次检测时的不良裂纹分布为

$$f'_{a(n\tau)}(x;2)=q(n-1)g(x),\qquad n\geqslant 2 \tag{13.4.15}$$

$$f'_{a(n\tau)}(x;2)=\int_0^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n-1}\{1-\mathrm{POD}[A_1(x;m\tau,z)]\}\right)f_{a(0)}[Y_1(x;n\tau,z);2]$$
$$J_1(x;n\tau,z)f_Z(z)\mathrm{d}z+\sum_{i=0}^{n-2}q(i)\int_0^{\infty}\left(\prod_{m=0}^{n-i-2}\{1-\mathrm{POD}[A_2(x;m\tau,z)]\}\right)$$
$$g\{Y_2[x;(n-i-1)\tau,z]\}\times J_2[x;(n-i-1)\tau,z]f_Z(z)\mathrm{d}z,\qquad n\geqslant 2 \tag{13.4.16}$$

式中

$$Y_1(x;n\tau,z)=\frac{x}{(1+n\tau cQzx^c)^{1/c}},\qquad Y_1\geqslant a_0 \tag{13.4.17}$$

$$J_1(x;n\tau,z)=\frac{1}{(1+n\tau cQzx^c)^{1/c+1}} \tag{13.4.18}$$

$$A_1(x;m\tau,z)=\frac{Y_1}{(1-m\tau cQzY_1^c)^{1/c}} \tag{13.4.19}$$

$$Y_2[x;(n-i-1)\tau,z]=\frac{x}{[1+(n-i-1)\tau cQzx^c]^{1/c}},Y_1\geqslant a_0 \tag{13.4.20}$$

$$J_2[x;(n-i-1)\tau,z]=\frac{1}{[1+(n-i-1)\tau cQzx^c]^{1/c+1}} \tag{13.4.21}$$

$$A_2(x;m\tau,z)=\frac{Y_2}{(1-m\tau cQzY_2^c)^{1/c}} \tag{13.4.22}$$

在第 n 个周期 τ 之后，检测前的失效可能性 $F(n)$、检测后的失效可能性 $\bar{F}(n)$ 及裂纹小于 a_0 的可能性的计算如下：

$$F(n)=\int_{a_c}^{\infty}f_{a(n\tau)}(x;2)\mathrm{d}x \tag{13.4.23}$$

$$\bar{F}(n)=\int_{a_c}^{\infty}f_{a(n\tau)}(x;2)[1-\mathrm{POD}(x)]\mathrm{d}x \tag{13.4.24}$$

$$q(n)=\int_{a_0}^{\infty}f_{a(n\tau)}(x;2)\mathrm{POD}(x)\mathrm{d}x+q(n-1)\left[1-\int_{a_0}^{\infty}g(x)\mathrm{d}x\right] \tag{13.4.25}$$

13.4.2　数值算例

根据文献[18]，各个方程的计算参数选择为：$\mu_T=3.602$，$\sigma_T=0.350$，$b=1.046$，$Q=6.650\times10^{-4}$，$\mu_Z=0$，$\sigma_Z=0.128$，$\alpha=0.660$，$\beta=3.950$，参考裂纹尺寸设为 $a_0=0.084$mm，临界裂纹尺寸设为 $a_c=9.400$mm，初始裂纹的平均尺寸为 0.047mm，方差为 79.38%，则计算得到 $\mu_1=-1.328$，$\sigma_1=0.304$。

图 13.14 为在役检查对失效风险的影响，实线为没有经过在役检查的失效概率，虚线为在役检查之后的失效概率。可以看到，如果不进行在役检查，则失效概率随着服役时间延长不断上升，而周期性的在役检查可以有效降低失效风险。图 13.15 和图 13.16 分别为每次在役检查之前和之后的缺陷尺寸分布，可以看到，在役检查之后，大尺寸裂纹明显减少，所以在役检查可以看做是一个滤波器，将大尺寸的裂纹过滤出来。被检出裂纹的分布概率如图 13.17 所示。

从图 13.14 还可以看到，在役检查对失效风险的降低的作用在服役后期比初期更为显著，为了更准确地描述在役检查对失效风险的影响，图 13.18 给出了非周期在役检查降低失效风险的曲线图，可以看到，合适的在役检查时间可以将风险降低到 10^{-5} 以下。

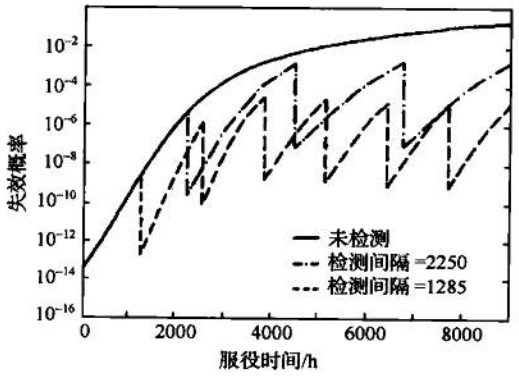


图 13.14 周期检测后的失效概率

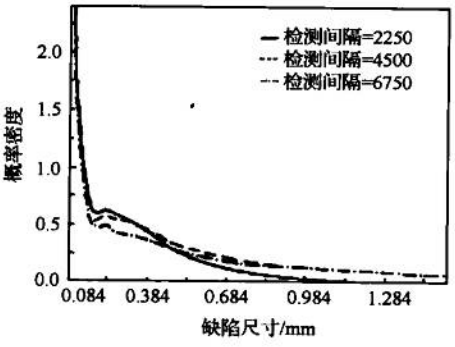


图 13.15 检测之前的缺陷分布

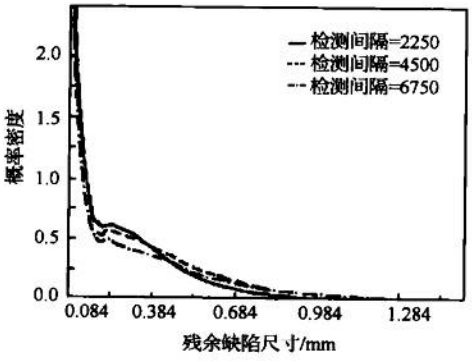


图 13.16 检测之后的缺陷分布

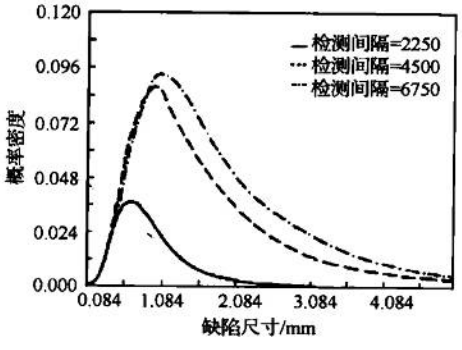


图 13.17 检出缺陷的分布

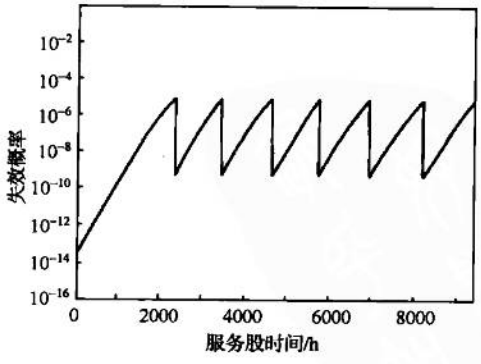


图 13.18 非周期检测的失效概率

参 考 文 献

[1] Georgiou G A. Probability of detection (POD) curves: Derivation, application and limitations[R]. Health and Safety Executive, 2006.

[2] ASM International. ASME Metals Handbook: Nondestructive Evaluation and Quality Control[M]. New York: ASM International, 1989, 17.

[3] Doctor S R. Austenitic steel piping testing exercises in PISC[J]. Nuclear Engineering and Design, 1995, 157:231-244.

[4] Visser W. POD/POS curves for non-destructive examination[R]. Health and Safety Executive, 2000.

[5] Carvalho A A. Reliability of the manual and automatic ultrasonic technique in the detection of pipe weld defects[J]. Insight NDT,2006,48(11):1-6.

[6] Camerini C S. Reliability analysis of the ultrasonic inspection of welded beads[R]. VI National Seminary of NDT, Belo Horizonte, 1985.

[7] Harding C A. Model-assisted POD for ultrasonic detection of cracks at fastener holes[C]. Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, 2001.

[8] Harding C. Model-assisted probability of detection validation of automated ultrasonic scanning for crack detection at fastener holes [C]. 10th Joint Conference on Aging Aircraft, 2007.

[9] Model-Assisted POD working group prospectus[EB/OL]. [2010-01-11]. http://www.cnde.iastate.edu/MAPOD/ Reference%20Documents.html.

[10] Burch S F. Computer modeling for the predication of the probability of detection of ultrasonic corrosion mapping[J]. Insight NDT, 2005,47(12):761-764.

[11] Wal M. Modelling of inspection reliability[C]. The Institution of Electrical Engineers, 1996.

[12] Volker A W F. Modeling of NDE reliability: Development of a POD-Generator[C]. 16th WCNDT, 2004:383-390.

[13] Volker A W F. POD-generator, development of the numerical modeling tools for quantitative assessment of the performance of non-destructive inspection techniques[C]. 17th WCNDT, 2008.

[14] Nath S K. Reliability analysis of time of flight diffraction characterization of inclined cracks[J]. Material evaluation, 2009,3:342-353.

[15] Wall M. Human factors in pod modeling and use of trial data [J]. Insight NDT, 2009, 51(10):533-561.

[16] Ali S A. Risk-informed in-service inspection[J]. Nuclear Engineering and Design,1998, 18:221-224.

[17] Gandossi L. The link between risk-informed in-service inspection and inspection qualification[J]. Insight NDT, 2009,51(1):16-20.

[18] Wu W F. A study of risk-based non-destructive in-service inspection[J]. Nuclear Engineering and Design, 1995, 158:409-415.

附录 1　瑞利积分计算声场

```
% this programe save the sound path as a file,to decrease computation
function A=spath(k,px,py,cy,cz,lx,ly)
%统一单位
% lx,ly 探头位置
px=px * 1e-3;
py=py * 1e-3;
cz=cz * 1e-3;
cy=cy * 1e-3;
lx=lx * 1e-3;
ly=ly * 1e-3;
k=k * pi/180;
%步长
fx=px/5;
fy=py/5;
fzz=1e-3;
fyy=1e-3;
%路径计算
a=0;
zp=0;xc=0;
for xp=-px/2+fx/2:fx:px/2-fx/2
    for yp=-py/2+fy/2:fy:py/2-fy/2
        a=a+1;b=0;

        yp=yp * cos(k);zp=yp * tan(k);
        yp=yp+ly;xp=xp+lx;

        for zc=-cz+fzz/2:fzz:-fzz/2
            b=b+1;c=0;
            for yc=-cy/2+fyy/2:fyy:cy/2-fyy/2
                c=c+1;

                DF(b,c)=norm([xp,yp,zp]-[xc,yc,zc]);
```

```
            end
        end
        A{a}=DF;
    end
end

function Fi=ngifft(k,px,py,cy,cz,lx,ly,f,fs,N)
%计算 spath
CCC=spath(k,px,py,cy,cz,lx,ly);
DF=CCC;
L1=CCC;

%读取长度
le=length(L1);
[as,bs]=size(DF{1});

%声速
c2=3230;

%原始信号
Y=signalfft(f,fs,N);

%叠加
for n=1:N
    fn=(n-1)*fs/N;
    if  fn>0&fn<2*f
        k2=2*pi*fn/c2;
        S=Y(n);
        MMM=0;

        for aa=1:le
            Mphase=exp(-(i*k2*L1{aa}));
            Mfield=(S*Mphase./DF{aa});
            MMM=MMM+Mfield;
        end
        B{n}=MMM*px*py*1e-6/le;%乘以面积
    else
        B{n}=zeros(as,bs);
```

```
    end
end

%%%%%%%%%%反傅里叶
for ja=1:as
    for jb=1:bs
        for jn=1:N
            mdi(jn)=B{jn}(ja,jb);
        end
        Fi(ja,jb)=max(abs(ifft(mdi)));
    end
end
imagesc(Fi);
%%%%%%%%%%


function Y=signalfft(f,fs,N)
n=0:N-1;
t=n/fs;
for k=1:N
    if t(k)>0&t(k)<3/f;

        vt(k)=(1-cos(2*pi*f*t(k)/3))*cos(2*pi*f*t(k))+i*(1-cos(2*pi*
              f*t(k)/3))*sin(2*pi*f*t(k));
              else vt(k)=0;
    end
end
Y=fft(vt,N);
```

附录 2　高斯法计算声场

```
function multiweld
f=2e6;
c0=3230;rp0=7.8e3;v0=1;
c1=2730;c1s=c1/2;rp1=7.8e3;
c2=3300;c2s=c2/2;rp2=7.8e3;
c3=2700;c3s=c3/2;rp3=7.8e3;
c4=3230;c4s=c4/2;rp4=7.8e3;
k0=2*pi*f/c0;
k1=2*pi*f/c1;
k2=2*pi*f/c2;
k3=2*pi*f/c3;
k4=2*pi*f/c4;
w=0.004;xr=k0*w^2; %束腰和瑞利距离
%all angle, assume that 80 75 75 80
iag=45; %incident angle
iag0=55;
rag1=asin(c1/c0*sin(iag0*pi/180))*180/pi; %refraction angel P
rag1s=asin(c1s/c0*sin(iag0*pi/180))*180/pi;
iag1=rag1+5;
rag2=asin(c2/c1*sin(iag1*pi/180))*180/pi;
rag2s=asin(c2s/c1*sin(iag1*pi/180))*180/pi;
iag2=rag2-60;
rag3=asin(c3/c2*sin(iag2*pi/180))*180/pi;
rag3s=asin(c3s/c2*sin(iag2*pi/180))*180/pi;
iag3=rag3+25;
rag4=sin(c4/c3*sin(iag3*pi/180))*180/pi;
rag4s=sin(c4s/c3*sin(iag3*pi/180))*180/pi;
%incident point on each interface
D0=0.0171; %与x轴负半轴夹角45°
D1=0.0164; %33.82
D2=0.0102; %50.47
D3=0.0228; %49.47
%transmission coeffiecient
```

```
T01=2*cos(iag0/180*pi)*(1-2*(sin(rag1s/180*pi))^2)/(cos(rag1/180*pi)+rp1*c1/rp0/c0*cos(iag0/180*pi)*((c1s/c1)^2*sin(2*rag1s/180*pi)*sin(2*rag1/180*pi)+cos(2*rag1s/180*pi)));
T12=2*cos(iag1/180*pi)*(1-2*(sin(rag2s/180*pi))^2)/(cos(rag2/180*pi)+rp2*c2/rp1/c1*cos(iag1/180*pi)*((c2s/c2)^2*sin(2*rag2s/180*pi)*sin(2*rag2/180*pi)+cos(2*rag2s/180*pi)));
T23=2*cos(iag2/180*pi)*(1-2*(sin(rag3s/180*pi))^2)/(cos(rag3/180*pi)+rp3*c3/rp2/c2*cos(iag2/180*pi)*((c3s/c3)^2*sin(2*rag3s/180*pi)*sin(2*rag3/180*pi)+cos(2*rag3s/180*pi)));
T34=2*cos(iag3/180*pi)*(1-2*(sin(rag4s/180*pi))^2)/(cos(rag4/180*pi)+rp4*c4/rp3/c3*cos(iag3/180*pi)*((c4s/c4)^2*sin(2*rag4s/180*pi)*sin(2*rag4/180*pi)+cos(2*rag4s/180*pi)));
% 叠加系数
A=[-2.9716+8.6187*i
-3.4811+0.9687*i
-1.3982-0.8128*i
0.0773-0.3303*i
2.8798+1.6109*i
0.1259-0.0957*i
-0.2641-0.6723*i
18.019+7.8291*i
0.0518+0.0182*i
-16.9438-9.9384*i
0.3708+5.4522*i
-6.6929+4.0722*i
-9.3638-4.9998*i
1.5872-15.4212*i
19.0024+3.6850*i];
B=[4.1869-5.1560*i
3.8398-10.8004*i
3.4355-16.3582*i
2.4618-27.7134*i
5.4699+28.6319*i
1.9833-33.2885*i
2.9335-22.0151*i
6.3036+36.7772*i
1.3046-38.4650*i
6.5889+37.0680*i
```

```
5.5518+22.4255*i
5.4013+16.7326*i
5.1498+11.1249*i
4.9665+5.6855*i
4.6296+0.3055*i];
a=0;
for x=0:0.0001:0.06
    a=a+1;b=602;
    for z=-0.06:0.0001:0;
        b=b-1;
        Q=0;
        if z+tan(80/180*pi)*(x-0.01)<0  % in the 0 medium
           % position tansfermation
           x0=cos(-135/180*pi)*x+sin(-135/180*pi)*(z-0);
           z0=-sin(-135/180*pi)*(x+0)+cos(-135/180*pi)*(z-0);
           y0=0;
           for n=1:15;
               P(n)=rp0*c0*v0*A(n)/(1+i*B(n)*z0/xr)*exp(i*k0*z0)*exp
               (-B(n)*(x0^2+y0^2)/w^2/(1+i*B(n)*z0/xr));
                   Q=Q+P(n)*3.2e-8;
            end
    elseif z+tan(80/180*pi)*(x-0.01)>=0&z+tan(75/180*pi)*(x-0.02)<0 %
        in the 1 medium
         % position tansfermation
        x1=cos(-123.82/180*pi)*(x-0.0121)+sin(-123.82/180*pi)*(z+0.0121);
        z1=-sin(-123.82/180*pi)*(x-0.0121)+cos(-123.82/180*pi)*(z+0.0121);
        y1=0;
        for n=1:15;
            G00=-i*k0*w^2/2/B(n)*[1,0;0,1];
            G0D=G00+D0*[1,0;0,1];
             % the interface between 0 and 1
            G01(1,1)=(cos(rag1/180*pi))^2/(cos(iag0/180*pi))^2*G0D(1,1);
            G01(2,2)=G0D(2,2);
            G01(1,2)=0;
            G01(2,1)=0;
            G1z=G01+c1/c0*z1*[1,0;0,1];
            P(n)=A(n)/(1+i*B(n)*D0/xr)*T01*exp(i*k0*D0+i*k1*z1)*
            sqrt(det(G01))/sqrt(det(G1z))*exp(i*k0*[x1,y1]*inv(G1z)*[x1,
```

```
            y1]'/2);
            Q=Q+P(n);
          end
      elseif z+tan(75/180 * pi) * (x-0.02)>=0&z-tan(75/180 * pi) * (x-0.04)>0 % in
          the 2 medium
          x2=cos(-140.27/180 * pi) * (x-0.0257)+sin(-140.27/180 * pi) * (z+0.0212);
          z2=-sin(-140.27/180 * pi) * (x-0.0257)+cos(-140.27/180 * pi) * (z+0.0212);
          y2=0;
          for n=1:15;
              G00=-i * k0 * w^2/2/B(n) * [1,0;0,1];
              G0D=G00+D0 * [1,0;0,1];
          % the interface between 0 and 1
          G01(1,1)=(cos(rag1/180 * pi))^2/(cos(iag0/180 * pi))^2 * G0D(1,1);
          G01(2,2)=G0D(2,2);
          G01(1,2)=0;
          G01(2,1)=0;
          G1D=G01+c1/c0 * D1 * [1,0;0,1];
          % the interface between 1 and 2
          G12(1,1)=(cos(rag2/180 * pi))^2/(cos(iag1/180 * pi))^2 * G1D(1,1);
          G12(2,2)=G1D(2,2);
          G12(1,2)=0;
          G12(2,1)=0;
          G2z=G12+c2/c1 * z2 * [1,0;0,1];
    P(n)=A(n)/(1+i * B(n) * D0/xr) * T01 * T12 * exp(i * k0 * D0+i * k1 * D1+i * k2 * z2)
* sqrt(det(G01))/sqrt(det(G1D)) * sqrt(det(G12))/sqrt(det(G2z)) * exp(i * k0 * [x2,y2]
* inv(G2z) * [x2,y2]'/2);
              Q=Q+P(n);
            end
      elseif z-tan(75/180 * pi) * (x-0.04)<=0&z-tan(80/180 * pi) * (x-0.05)>0 % in
          the 3 medium
          x3=cos(-139.27/180 * pi) * (x-0.0322)+sin(-139.27/180 * pi) * (z+0.0291);
          z3=-sin(-139.27/180 * pi) * (x-0.0322)+cos(-139.27/180 * pi) * (z+0.0291);
          y3=0;
          for n=1:15;
          G00=-i * k0 * w^2/2/B(n) * [1,0;0,1];
              G0D=G00+D0 * [1,0;0,1];
          % the interface between 0 and 1
          G01(1,1)=(cos(rag1/180 * pi))^2/(cos(iag0/180 * pi))^2 * G0D(1,1);
```

```
            G01(2,2)=G0D(2,2);
            G01(1,2)=0;
            G01(2,1)=0;
            G1D=G01+c1/c0 * D1 * [1,0;0,1];
             % the interface between 1 and 2
            G12(1,1)=(cos(rag2/180 * pi))^2/(cos(iag1/180 * pi))^2 * G1D(1,1);
            G12(2,2)=G1D(2,2);
            G12(1,2)=0;
            G12(2,1)=0;
            G2D=G12+c2/c1 * D2 * [1,0;0,1];
             % the interface between 2 and 3
            G23(1,1)=(cos(rag3/180 * pi))^2/(cos(iag2/180 * pi))^2 * G2D(1,1);
            G23(2,2)=G2D(2,2);
            G23(1,2)=0;
            G23(2,1)=0;
            G3z=G23+c3/c2 * z3 * [1,0;0,1];
    P(n)=A(n)/(1+i * B(n) * D0/xr) * T01 * T12 * T23 * exp(i * k0 * D0+i * k1 * D1+i * k2
* D2+i * k3 * x3) * sqrt(det(G01))/sqrt(det(G1D)) * sqrt(det(G12))/sqrt(det(G2D)) *
sqrt(det(G23))/sqrt(det(G3z)) * exp(i * k0 * [x3,y3] * inv(G3z) * [x3,y3]'/2);
                Q=Q+P(n);
               end
        elseif z-tan(80/180 * pi) * (x-0.05)<=0  % in the 4 medium
            x4=cos(-141.81/180 * pi) * (x-0.0427)+sin(-141.81/180 * pi) * (z+0.0414);
            z4=-sin(-141.81/180 * pi) * (x-0.0427)+cos(-141.81/180 * pi) * (z+0.0414);
                y4=0;
            for n=1:15;
            G00=-i * k0 * w^2/2/B(n) * [1,0;0,1];
                 G0D=G00+D0 * [1,0;0,1];
             % the interface between 0 and 1
            G01(1,1)=(cos(rag1/180 * pi))^2/(cos(iag0/180 * pi))^2 * G0D(1,1);
            G01(2,2)=G0D(2,2);
            G01(1,2)=0;
            G01(2,1)=0;
            G1D=G01+c1/c0 * D1 * [1,0;0,1];
             % the interface between 1 and 2
            G12(1,1)=(cos(rag2/180 * pi))^2/(cos(iag1/180 * pi))^2 * G1D(1,1);
            G12(2,2)=G1D(2,2);
            G12(1,2)=0;
            G12(2,1)=0;
```

```
            G2D=G12+c2/c1 * D2 * [1,0;0,1];
             % the interface between 2 and 3
            G23(1,1)=(cos(rag3/180 * pi))^2/(cos(iag2/180 * pi))^2 * G2D(1,1);
            G23(2,2)=G2D(2,2);
            G23(1,2)=0;
            G23(2,1)=0;
            G3D=G23+c3/c2 * D3 * [1,0;0,1];
             % the interface between 3 and 4
            G34(1,1)=(cos(rag4/180 * pi))^2/(cos(iag3/180 * pi))^2 * G3D(1,1);
            G34(2,2)=G3D(2,2);
            G34(1,2)=0;
            G34(2,1)=0;
            G4z=G34+c4/c3 * z4 * [1,0;0,1];
    P(n)=A(n)/(1+i * B(n) * D0/xr) * T01 * T12 * T23 * T34 * exp(i * k0 * D0+i * k1 * D1+
i * k2 * D2+i * k3 * D3+i * k4 * x4) * sqrt(det(G01))/sqrt(det(G1D)) * sqrt(det(G12))/
sqrt(det(G2D)) * sqrt(det(G23))/sqrt(det(G3D)) * sqrt(det(G34))/sqrt(det(G4z)) * exp
(i * k0 * [x4,y4] * inv(G4z) * [x4,y4]'/2);
                Q=Q+P(n);
              end
            end
           F(b,a)=Q;
            end
        end
        C=abs(F);
    B=max(max(C))
    image(C/B * 64)
```

附录 3　基尔霍夫系数

```
function Bpp=codiff(beta,theta,c1,c2) % beta 纵波入射角,theta 纵波折射角
n=c1/c2;
if beta==0
   Bpp=1;Bps=0;Bss=1;Bsp=0;
else
beta=beta*pi/180;
theta=theta*pi/180;
thetal=asin(sin(beta)/n);
App=(sin(2*beta)*sin(2*thetal)-n^2*cos(2*thetal)^2)/(sin(2*beta)*sin(2*
thetal)+n^2*cos(2*thetal)^2);
Aps=2*n*sin(2*beta)*cos(2*thetal)/(sin(2*beta)*sin(2*thetal)+n^2*cos
(2*thetal)^2);
Apn=1-App+tan(beta)*Aps/n;
Apt=1+App+cot(thetal)*Aps/n;
Bpp=-i/(2*n^2)*(sin(beta)*sin(2*theta)*Apt+cos(beta)*(2*sin(theta)^2-n^
2)*Apn);
end

function Bss=codiffss(beta,theta,c1,c2) % beta 横波入射角,theta 横波折射角
n=c1/c2;
if beta==0
   Bpp=1;Bps=0;Bss=1;Bsp=0;
else
beta=beta*pi/180;
theta=theta*pi/180;
thetas=asin(sin(beta)*n);
aaa=atan(2*sqrt(n^2*(sin(beta))^2)*sin(2*beta)*sin(beta)/(n*(cos(2*be-
ta))^2));
if angle(thetas)==0

Ass=(sin(2*beta)*sin(2*thetas)-n^2*cos(2*beta)^2)/(sin(2*beta)*sin(2*
    thetas)+n^2*cos(2*beta)^2);
    Asp=-n*sin(4*beta)/(sin(2*beta)*sin(2*thetas)+n^2*cos(2*beta)^2);
```

```
    else
        Asp=0;
        Ass=exp(-i*2*aaa);
    end
    Asn=1+Ass-n*cot(thetas)*Asp;
    Ast=1-Ass-n*tan(beta)*Asp;
    Bss=i/2*(cos(beta)*cos(2*theta)*Ast-sin(beta)*sin(2*theta)*Asn);
    end

    function Bps=codiffps(beta,theta,c1,c2) % beta 纵波入射角,theta 横波折射角
    n=c1/c2;
    if beta==0
      Bpp=1;Bps=0;Bss=1;Bsp=0;
    else
    beta=beta*pi/180;
    theta=theta*pi/180;
    thetal=asin(sin(beta)/n);
    App=(sin(2*beta)*sin(2*thetal)-n^2*cos(2*thetal)^2)/(sin(2*beta)*sin(2*
thetal)+n^2*cos(2*thetal)^2);
    Aps=2*n*sin(2*beta)*cos(2*thetal)/(sin(2*beta)*sin(2*thetal)+n^2*cos
(2*thetal)^2);
    Apn=1-App+tan(beta)*Aps/n;
    Apt=1+App+cot(thetal)*Aps/n;
    Bps=i/(2*n^2)*(sin(beta)*cos(2*theta)*Apt+cos(beta)*sin(2*theta)*
Apn);
    end

    function Bsp=codiffsp(beta,theta,c1,c2) % beta 横波入射角,theta 纵波折射角
    n=c1/c2;
    if beta==0
      Bpp=1;Bps=0;Bss=1;Bsp=0;
    else
    beta=beta*pi/180;
    theta=theta*pi/180;
    thetas=asin(sin(beta)*n);
    aaa=atan(2*sqrt(n^2*(sin(beta))^2)*sin(2*beta)*sin(beta)/(n*(cos(2*be-
ta))^2));
    if angle(thetas)==0
```

```
    Ass=(sin(2 * beta) * sin(2 * thetas)-n^2 * cos(2 * beta)^2)/(sin(2 * beta) * sin(2 *
        thetas)+n^2 * cos(2 * beta)^2);
        Asp=-n * sin(4 * beta)/(sin(2 * beta) * sin(2 * thetas)+n^2 * cos(2 * beta)^2);
    else
        Asp=0;
        Ass=exp(-i * 2 * aaa);
    end
    Asn=1+Ass-n * cot(thetas) * Asp;
    Ast=1-Ass-n * tan(beta) * Asp;
    Bsp=-i/(2 * n) * (cos(beta) * sin(2 * theta) * Ast-sin(beta) * (2 * sin(theta)^2-n^2) *
Asn);
    end
```

附录 4　波恩系数

```
%modified born approximation solution
%%ka<<1 缺陷深度 30mm,垂直入射。
%介质 Ti,p1=4.5;lamada1=7.76;miu1=4.41;夹杂 Al,p2=2.7;lamada2=6.3;miu2=2.68
%介质 Fe,p1=7.8;lamada1=10.88;miu1=8.14;夹杂 Ti,p2=4.5;lamada2=7.76;
miu2=4.41;
function modifybornapproximationBscanEllipsoidfol00
f=2e6;
%缺陷结构参数
a1=1.5e-3;
a2=6e-3;
a3=0.76e-3;
p2=4.5e3;lamada2=7.76e10;miu2=4.41e10;p1=7.8e3;lamada1=10.88e10;miu1=
8.14e10;
C1=sqrt((lamada1+2*miu1)/p1)
C2=sqrt((lamada2+2*miu2)/p2)
Cw=1480;
%%%1signal(采样频率 fs=20e6,采样点 N=512,)
fs=15e6;
N=256;
n=0:N-1;
t=n/fs;
K=2*pi*fs*n/N/C1;
Kw=2*pi*fs*n/N/Cw;
for k=1:N
if t(k)>0&t(k)<3/f;
vt(k)=(1-cos(2*pi*f*t(k)/3)).*cos(2*pi*f*t(k))+i*(1-cos(2*pi*f*t
(k)/3)).*sin(2*pi*f*t(k));
else vt(k)=0;
end
end
%FFT(求 FFt 频谱)
Y=fft(vt,N);%进行 fft 变换
mag=abs(Y);%求幅值 ? real or abs
```

```
p=0;
for x0=(-80:80)*1e-3          %探头位置水平面移动
    y0=0;
%%%2求champson给出的入射到缺陷的声场,缺陷位置,垂直于探头,深度为30mm(0,0,30)
Y1=0;
%水浸探伤,耦合介质70mm,Cw=1480,
n=Cw/C1;z1=1.5e+6;z2=4.6e+7;
%探头坐标位置(x0,y0,0),缺陷位置(mx,my,mz)=(0,0,-30)
for alfa=(-20:20)*0.127/20 %用角度离散探头,(聚焦探头,焦距f=100mm,半径12.7mm,则探头是张角为14.6°的球冠)
    for belta=(-20:20)*0.127/20
        x=(100*sin(alfa)+x0)*1e-3;y=(100*sin(belta)+y0)*1e-3;
        z=(sqrt(10000-x^2-y^2)-30)*1e-3;
        mx=0;                 %缺陷坐标(0,0,30e-3)
        my=0;
        mz=-30e-3;
        D=sqrt((y-my)^2+(x-mx)^2);
co=[(n^2-1),(-2*D*(n^2-1)),((n^2-1)*D^2+n^2*(z)^2-mz^2),(-2*D*n*z^2),(n^2*z^2*D^2)];
        root=roots(co);
        for g=1:4
            if root(g,1)>=0&&root(g,1)<=D&&angle(root(g,1))==0
              d1=root(g,1);
            end
        end
        d2=D-d1;
        Rf=sqrt((d1^2+z^2));
        R2=sqrt(d2^2+mz^2);
        cosin=z/Rf ;
        cosre=-mz/R2;
        DF=sqrt((Rf+R2*C1/Cw)*(Rf+R2*C1*cosin^2/(Cw*cosre^2)));
        tra=(2*z2/cosre)/(z2/cosre+z1/cosin);
        ds=(2*pi*100*(100-100*cos(0.127/20)))*1e-6;
        Y1=Y*ds.*exp(-i*(K*R2+Kw*Rf))*tra/DF+Y1;
        end
end
Y1;
%ifft反傅里叶求在M点的时域信号
```

```
    xifft=ifft(Y1);
    magx=real(xifft);
    ti=[0:length(xifft)-1]/fs;
    %近轴近似,折射
    %探头中心位置
    x=x0;
    y=y0;
    z=70e-3;
    %缺陷位置
    mx=0;
    my=0;
    mz=-30e-3;
    D=sqrt((y-my)^2+(x-mx)^2);
    co=[(n^2-1),(-2*D*(n^2-1)),((n^2-1)*D^2+n^2*(z)^2-mz^2),(-2*D*n*z^2),(n^2*
z^2*D^2)];
        root=roots(co);
        for g=1:2
            if root(g,1)>=0&&root(g,1)<=D&&angle(root(g,1))==0
              d1=root(g,1);
            end
        end
        d2=D-d1;
        Rf=sqrt((d1^2+z^2));
        R2=sqrt(d2^2+mz^2);
        cosin=z/Rf ;
        cosre=-mz/R2;
        DF=sqrt((Rf+R2*C1/Cw)*(Rf+R2*C1*cosin^2/(Cw*cosre^2)));
        tra=(2*z2/cosre)/(z2/cosre+z1/cosin);
    %%%3散射回波信号？耦合介质如何处理?
    for f=(1:length(Y))*fs/length(Y)
    k1T=2*pi*f/sqrt(miu1/p1);
    k2T=2*pi*f/sqrt(miu2/p2);
    k1L=2*pi*f/sqrt((lamada1+2*miu1)/p1);
    k2L=2*pi*f/sqrt((lamada2+2*miu2)/p2);
    theta=acos(cosre);
    zf=cos(theta);
    yf=0;
    xf=sin(theta);
```

```
    k=sqrt((k2L*xf)^2*a1^2+(k2L*yf)^2*a2^2+(k2L*zf)^2*a3^2);
    S=4*pi*a1*a2*a3*(sin(k)-k*cos(k))/k^3;
    A=k2L^2/(4*pi)*((p2-p1)/p2*cos(theta)-(lamada2-lamada1+2*(miu2-miu1)*cos
(theta)^2)/(lamada2+2*miu2))*S;
    Kw=2*pi*f/Cw;
    Us=A*exp(-i*(k1L*R2+Kw*Rf))/tra/DF; % ??? 界面处如何衰减???
    n=f*(length(Y))/fs;
    Echo(n)=Us*Y1(n);
    end
    Echo;
    % % % ifft 反傅里叶求探头接收到的时域信号
    A=ifft(Echo);
    magx=abs(A);              %求振幅幅值
    magx1=real(A);
    p=p+1;
    Am(:,p)=magx;
    Am1(:,p)=magx1;
    end
    Am;
    Bm=max(Am);
    Cm=max(Bm);
    for p=1:161
        if Bm(p)<0.5*Cm
           Am(:,p)=0;
        end
    end
    Dm=Am/Cm*64;
    Dm1=Am1/Cm*64;
    figure(1);
    image(Dm)
    figure(2);
    image(Dm1)
```

附录 5　GTD 衍射系数

```
function Diff=coegtd2(Rin,Rdiff,beta,alpha,theta,f,C)
 % alpha<=======>incide
 % theta<______>diffracte
k=2 * pi * f/C;
L=Rin * Rdiff * (sin(beta))^2/(Rin+Rdiff);
a11=UTDF(k,L,(theta-alpha));
a12=exp(j * 2 * k * L * (cos((theta-alpha)/2))^2);
a13=sgn(pi+alpha-theta);
a21=UTDF(k,L,(theta+alpha));
a22=exp(j * 2 * k * L * (cos((theta+alpha)/2))^2);
a23=sgn(pi-alpha-theta);
a1=a11 * a12 * a13;
a2=a21 * a22 * a23;
Diff=-exp(j * pi/4) * sqrt(L/pi) * (a1+a2)/sin(beta);
```

附录6 相控阵

```
% this programe save the sound path as a file,to decrease computation
function A=spath(k,px,py,cy,cz,lx,ly)
%统一单位
% lx,ly 探头位置
px=px * 1e-3;
py=py * 1e-3;
cz=cz * 1e-3;
cy=cy * 1e-3;
lx=lx * 1e-3;
ly=ly * 1e-3;
k=k * pi/180;
%步长
fx=px/5;
fy=py/5;
fzz=1e-3;
fyy=1e-3;
%路径计算
a=0;
zp=0;xc=0;
for xp=-px/2+fx/2:fx:px/2-fx/2
    for yp=-py/2+fy/2:fy:py/2-fy/2
        a=a+1;b=0;

        yp=yp * cos(k);zp=yp * tan(k);
        yp=yp+ly;xp=xp+lx;

        for zc=-cz+fzz/2:fzz:-fzz/2
            b=b+1;c=0;
            for yc=-cy/2+fyy/2:fyy:cy/2-fyy/2
                c=c+1;
                DF(b,c)=norm([xp,yp,zp]-[xc,yc,zc]);
            end
            end
```

```
            A{a}=DF;
        end
    end

    %% this program get each path m of all the elements
    function B=ph(px,py,cy,cz,Ne,disx,disy,gap,R,jiao)
    %cy 计算区域长度
    %cz 计算区域深度
    %Ne 晶片数
    %disx disy 探头中心位置
    %gap 晶元间隙
    L=(py+gap)*Ne-gap;
    for sn=1:Ne
        lx=disx;
        ly=disy+(py+gap)*(sn-1)-L/2+py/2;
        A{sn}=spath(0,px,py,cy,cz,lx,ly);
    end
    %%%%%%延迟法则
    R=R*1e-3;
    jiao=jiao*pi/180;
    focz=-R*cos(jiao);
    focy=R*sin(jiao);
    for sn=1:Ne
        element=[(py+gap)*(sn-1)-L/2+py/2,0]*1e-3;
        foc=[focy,focz];
        dis(sn)=norm(element-foc);
    end
    B={A,dis}


    function Y=signalfft(f,fs,N)
    n=0:N-1;
    t=n/fs;
    for k=1:N
        if t(k)>0&t(k)<3/f;
    vt(k)=(1-cos(2*pi*f*t(k)/3))*cos(2*pi*f*t(k))+i*(1-cos(2*pi*f*t
(k)/3))*sin(2*pi*f*t(k));
        else vt(k)=0;
```

```
    end
end
Y=fft(vt,N);

function Fi=ngph(px,py,cy,cz,Ne,disx,disy,gap,R,jiao,f,fs,N)
%计算 ph
CCC=ph(px,py,cy,cz,Ne,disx,disy,gap,R,jiao);
DF=CCC{1};
L1=CCC{1};

%读取长度
le=length(L1{1});
[as,bs]=size(DF{1}{1});

%声速
c2=5900;

%各晶片的延迟
delay=CCC{2};

%原始信号
Y=signalfft(f,fs,N);

%叠加
for n=1:N
    fn=(n-1)*fs/N;
    if fn>0&fn<2*f
      k2=2*pi*fn/c2;
      S=Y(n);
      MMM=0;

      for sn=1:Ne
          for aa=1:le
              Mphase=exp(-(i*k2*(L1{sn}{aa}-delay(sn))));
              Mfield=(S*Mphase./DF{sn}{aa});
              MMM=MMM+Mfield;
          end
      end
```

```
        B{n}=MMM*px*py*1e-6/le;%乘以面积
    else
        B{n}=zeros(as,bs);
    end
end

%%%%%%%%%%反傅里叶
for ja=1:as
    for jb=1:bs
        for jn=1:N
            mdi(jn)=B{jn}(ja,jb);
        end
        Fi(ja,jb)=max(abs(ifft(mdi)));
    end
end
imagesc(Fi);
```

附录 7　信号响应模型计算程序

程序 1：lineplot. m

```
function P=lineplot(AaR,AAR)
% AaR,AAR 分布表示缺陷尺寸数组和信号响应数组
lnA=log(AAR);
lna=log(AaR);
n=length(lnA);
plot(lna,lnA,'o')
hold on
p=polyfit(lna,lnA,1);
a=min(lna):0.01:max(lna);
plot(a,p(1)*a+p(2))
beta0=p(2)
beta1=p(1)
sigmas=sqrt(sum((lnA-beta0-beta1*lna).^2)/n)
P(1)=beta0
P(2)=beta1
P(3)=sigmas
```

程序 2：newdim. m

```
function [P,iter,err]=newdim(P,delta,epsilon,maxl)
% 这里的输入同附录 8 中的程序 2.
    for k=1:maxl
    Y=F(P);
    J=JF(P);
    Q=P-(inv(J)*Y)';
    err=norm(Q-P);
    relerr=err/(norm(Q)+eps);
    P=Q;
    iter=k;
    if (err<delta)|(relerr<delta)|(abs(Y)<epsilon)
            break
```

```
    end
end
beta0=P(1);
beta1=P(2);
sigmas=P(3);
```

程序 3:F.m

```
function Z=F(X,AaR,AaT,AaS,AAR,AAT,AAS)
% 这里 AaR 表示记录阀值与饱和阀值之间的缺陷尺寸,AaT 表示记录阀值以下的缺陷尺寸,AaS
% 表示饱和阀值以上的缺陷尺寸,AAR 表示记录阀值与饱和阀值之间的信号幅值,AAT 表示记
% 录阀值以下信号幅值,AAS 表示饱和阀值以上的信号幅值。
beta0=X(1);
beta1=X(2);
sigmas=X(3);
YR=log(AAR);
XR=log(AaR);
r=length(XR);
ZR=(YR-beta0-beta1 * XR)/sigmas;
YS=log(AAS);
XS=log(AaS);
ZS=(YS-beta0-beta1 * XS)/sigmas;
YT=log(AAT);
XT=log(AaT);
ZT=(YT-beta0-beta1 * XT)/sigmas;
V=normpdf(ZS)./(1-normcdf(ZS));
W=normpdf(ZT)./normcdf(ZT);
F1=sum(ZR)+sum(V)-sum(W);
F2=sum(ZR. * XR)+sum(V. * XS)-sum(W. * XT);
F3=-r+sum(ZR.^2)+sum(V. * ZS)-sum(W. * ZT);
Z=[F1,F2,F3];
```

程序 4:JF.m

```
function M=JF(X,AaR,AaT,AaS,AAR,AAT,AAS)
beta0=X(1);
beta1=X(2);
sigmas=X(3);
```

```
YR=log(AAR);
XR=log(AaR);
r=length(XR);
ZR=(YR-beta0-beta1 * XR)/sigmas;
dzdb0R=-1/sigmas;
dzdb1R=-XR/sigmas;
dzdsmR=-(YR-beta0-beta1 * XR)/sigmas^2;
YS=log(AAS);
XS=log(AaS);
ZS=(YS-beta0-beta1 * XS)/sigmas;
dzdb0S=-1/sigmas;
dzdb1S=-XS/sigmas;
dzdsmS=-(YS-beta0-beta1 * XS)/sigmas^2;
nS=normpdf(ZS);
NS=normcdf(ZS);
V=nS./(1-NS);
dvdz=(nS.^2-ZS. * nS. * (1-NS))./(1-NS).^2;
YT=log(AAT);
XT=log(AaT);
ZT=(YT-beta0-beta1 * XT)/sigmas;
dzdb0T=-1/sigmas;
dzdb1T=-XT/sigmas;
dzdsmT=-(YT-beta0-beta1 * XT)/sigmas^2;
nT=normpdf(ZT);
NT=normcdf(ZT);
W=nT./NT;
dwdz=-(nT.^2+ZT. * nT. * NT)./NT.^2;
M=zeros(3,3);
M(1,1)=r * dzdb0R+sum(dvdz * dzdb0S)-sum(dwdz * dzdb0T);
M(1,2)=sum(dzdb1R)+sum(dvdz. * dzdb1S)-sum(dwdz. * dzdb1T);
M(1,3)=sum(dzdsmR)+sum(dvdz. * dzdsmS)-sum(dwdz. * dzdsmT);
M(2,1)=sum(XR. * dzdb0R)+sum(XS. * dvdz. * dzdb0S)-sum(XT. * dwdz. * dzdb0T);
M(2,2)=sum(XR. * dzdb1R)+sum(XS. * dvdz. * dzdb1S)-sum(XT. * dwdz. * dzdb1T);
M(2,3)=sum(XR. * dzdsmR)+sum(XS. * dvdz. * dzdsmS)-sum(XT. * dwdz. * dzdsmT);
M(3,1)=sum(2 * ZR. * dzdb0R)+sum((V+dvdz. * ZS). * dzdb0S)-sum((W+ZT. * dwdz). *
dzdb0T);
M(3,2)=sum(2 * ZR. * dzdb1R)+sum((V+dvdz. * ZS). * dzdb1S)-sum((W+ZT. * dwdz). *
dzdb1T);
```

```
M(3,3)=sum(2 * ZR. * dzdsmR)+sum((V+dvdz. * ZS). * dzdsmS)-sum((W+ZT. * dwdz). * dzdsmT);
```

程序 5:POD. m

```
function POD(adec,Para)
% adec 为设置检测阀值
belta0=Para(1);
belta1=Para(2);
sima=Para(3);
miu=(log(adec)-belta0)/belta1;
sima=sima/belta1;
a=0.01:0.01:0.4; % 设置自变量范围
aln=log(a);
Fx=normcdf(aln,miu,sima);
plot(a,Fx)
```

程序 6:lowerbound. m

```
function lowerbound(adec,Para,AaR,AaT,AaS,AAR,AAT,AAS)
beta0=Para(1);
beta1=Para(2);
sigmas=Para(3);
miu=(log(adec)-beta0)/beta1;
sigma=sigmas/beta1;
% 1 ÕÚRCøÓõ
YR=log(AAR);
XR=log(AaR);
r=length(XR);
ZR=(YR-beta0-beta1 * XR)/sigmas;
YS=log(AAS);
XS=log(AaS);
s=length(AaS);
ZS=(YS-beta0-beta1 * XS)/sigmas;
V=normpdf(ZS). /(1-normcdf(ZS));
lam=V. * (V-ZS);
YT=log(AAT);
XT=log(AaT);
t=length(AaT);
ZT=(YT-beta0-beta1 * XT)/sigmas;
```

```
    W=normpdf(ZT)./normcdf(ZT);
    fai=-W.*(W+ZT);
    I3(1,1)=(r+sum(lam)-sum(fai))/sigmas^2;
    I3(1,2)=(sum(XR)+sum(XS.*lam)-sum(XT.*fai))/sigmas^2;
    I3(2,1)=I3(1,2);
    I3(1,3)=(2*sum(ZR)+sum(V)+sum(ZS.*lam)-sum(W)-sum(ZT.*fai))/sigmas^2;
    I3(2,2)=(sum(XR.^2)+sum(lam.*XS.^2)-sum(fai.*XT.^2))/sigmas^2;
    I3(2,3)=(2*sum(XR.*ZR)+sum(XS.*V)+sum(XS.*ZS.*lam)-sum(XT.*W)-sum(XT.*
ZT.*fai))/sigmas^2;
    I3(3,2)=I3(2,3);
    I3(3,3)=(-r+3*sum(ZR.^2)+2*sum(ZS.*V)+sum(lam.*ZS.^2)-2*sum(ZT.*W)-sum
(fai.*ZT.^2))/sigmas^2;
    V3=inv(I3);
    T=[1,miu,0;0,sigma,-1];
    V2=1/beta1^2*T*V3*T;
    I2=inv(V2);
    n=r+s+t;
    I21=I2/n*sigma^2;
    k0=I21(1,1);
    k1=-I21(1,2);
    k2=I21(2,2);
    gama=5.222;
    nn=0;
    for a=0.01:0.01:0.4
        nn=nn+1;
        lnaa=log(a);
        zz=(lnaa-miu)/sigma;
        h=sqrt(gama/n/k0*(1+(k0*zz+k1)^2/(k0*k2-k1^2)));
        aa(nn)=a;
        lowb(nn)=normcdf(zz-h,0,1);
    end
    plot(aa,lowb)
```

附录 8　log-odds 模型计算程序

log-odds 模型计算程序适用于计算 hit/miss 型数据的 POD 及其置信下限。该程序包括 intialvalue. m、newdim. m、F. m、JF. m、POD. m、PODlowerbound. m 等六个采用 MATLAB 编写的程序，具体计算过程为：

(1)利用程序 intialvalue. m 计算用于牛顿迭代的初始值 μ 和 σ。

(2)然后利用牛顿迭代法进行关于 μ 和 σ 方程组的求解：以 intialvalue. m 的计算结果作为初始值，利用程序 newdim. m 进行计算，其中 F. m 和 JF. m 为 newdim. m 的子程序。

(3)将解方程组得到 μ 和 σ 作为程序 POD. m 的输入，进行 POD 曲线计算。

(4)将解方程组得到 μ 和 σ 作为程序 PODlowerbound. m 的输入，进行置信下限计算。

(5)在计算过程中要注意 intialvalue. m、F. m、JF. m 和 PODlowerbound. m 等程序都需要输入检测结果数据。

程序 1：intialvalue. m

```
function P=intialvalue(Fsize,Hitmiss)
% 输入为缺陷尺寸数值 Fsize 和 Hitmiss 型缺陷检出结果，计算得到初值 miu 和 sigma.
n=length(Fsize);
for a=1:n-1
    for b=2:n-a+1;
        if Fsize(b-1)>Fsize(b)
            x=Fsize(b-1);
            Fsize(b-1)=Fsize(b);
            Fsize(b)=x;
            y=Hitmiss(b-1);
            Hitmiss(b-1)=Hitmiss(b);
            Hitmiss(b)=y;
        end
    end
end
% 利用附录 A 中公式 A12 和 A13 求初始值；
% 若初值进行牛顿迭代时不收敛，则选择更大的缺陷尺寸重新计算，即增加下行语句中
```

m值。

```
Fsize=Fsize(m:n);
Hitmiss=Hitmiss(m:n);
n=length(Fsize)
X=log(Fsize);
Xi=X(2:n);
Xi1=X(1:n-1);
p=Hitmiss;
pi=Hitmiss(2:n);
pi1=Hitmiss(1:n-1);
miu=X(n)-X(1) * p(1)/2-0.5 * sum((Xi-Xi1). * (pi-pi1));
sigma=sqrt(X(n)^2-p(1)/2 * X(1)^2-miu^2-0.5 * sum((Xi.^2-Xi1.^2). * (pi-pi1)));
```

程序 2:newdim. m

```
function [P,iter,err]=newdim(P,delta,epsilon,maxl)
% P 表示输入初值,delta 表示 P 的误差;epsilon 表示 F(P)的误差;maxl 表示最大迭代步。
% 一般选择 delta=1e-6;epsilon=1e-6;maxl=1000;
 for k=1:maxl
     Y=F(P);
     J=JF(P);
     Q=P-(inv(J) * Y)';
     err=norm(Q-P);
     relerr=err/(norm(Q)+eps);
     P=Q;
     iter=k;
     if (err<delta)|(relerr<delta)|(abs(Y)<epsilon)
            break
     end
end
```

程序 3:F. m

```
function Z=F(X,Fsize,Hitmiss)
miu=X(1);
sigma=X(2);
z=Hitmi;
a=Fsize;
n=length(z);
k=1;
```

```
Z=zeros(1,2);
ha=exp(pi/sqrt(3) * (log(a)-miu)/sigma);
Z=zeros(1,2);
Z(1)=sum(z)-sum(ha. /(1+ha));
Z(2)=sum(z. * log(a))-sum(log(a). * ha. /(1+ha));
```

程序 4:JF. m

```
function W=JF(X,Fsize,Hitmiss)
miu=X(1);
sigma=X(2);
z=Hitmi;
a=Fsize;
n=length(z);
k=1;
ha=exp(pi/sqrt(3) * (log(a)-miu)/sigma);
W=zeros(2,2);
W(1,1)=sum(ha. /(1+ha).^2 * pi/sqrt(3)/sigma);
W(1,2)=sum(ha. /(1+ha).^2. * (log(a)-miu) * pi/sqrt(3)/sigma^2);
W(2,1)=sum(ha. /(1+ha).^2. * log(a) * pi/sqrt(3)/sigma);
W(2,2)=sum(ha. /(1+ha).^2. * (log(a)-miu). * log(a) * pi/sqrt(3)/sigma^2);
```

程序 5:POD. m

```
function POD(P,delta,epsilon,maxl)
P=newdim(P,delta,epsilon,maxl);
miu=P(1);
sigma=P(2);
a=0:0.1:120; %设置自变量范围
ha=exp(pi/sqrt(3) * (log(a)-miu)/sigma);
POD=ha. /(1+ha);
plot(a,POD)
```

程序 6:PODlowerbound. m

```
function PODlowerbound(P,delta,epsilon,maxl,Fsize)
P=newdim(P,delta,epsilon,maxl);
miu=P(1);
sigma=P(2);
n=length(Fsize);
ha=exp(pi/sqrt(3) * (log(Fsize)-miu)/sigma);
```

```
k0=1/n*pi^2/3*sum(ha./(1+ha).^2);
k1=-1/n*pi^2/3/sigma*sum(log(Fsize).*ha./(1+ha).^2);
k2=1/n*pi^2/3/sigma^2*sum(log(Fsize).^2.*ha./(1+ha).^2);
%查表2.2进行gama的选择
gama=5.18;
a=0:0.1:120; %设置自变量范围
z=(log(a)-miu)/sigma;
h=sqrt(gama/n/k0*(1+(k0*z+k1).^2/(k0*k2-k1^2)));
lowbound=normcdf(z-h,0,1);
plot(a,lowbound)
```